

①

(a) Totalmatrisen Gausselimineras:

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{r_3 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Delta ger $z = -1$, $y = -z = 1$,
 $x = -2 - 2z = 0$

dvs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(b)

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Så $x_2 = 2$ och $x_1 = 1 + 2x_2 = 5$

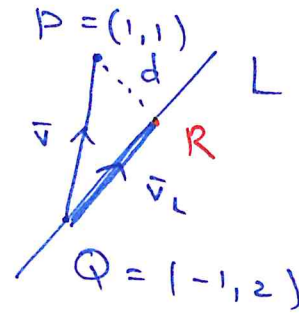
dvs $\bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ang
2021

2

L ges av

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$



Q : punkten på L för $t=0$

dvs $Q = (-1, 2)$. $\vec{v} = \vec{QP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_L = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{2+3}{1+9} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(a) Avståndet är $d = \|\vec{v} - \vec{v}_L\|$ där

$$\vec{v} - \vec{v}_L = \begin{pmatrix} 2 - 1/2 \\ -1 + 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så $d = \frac{1}{2} \sqrt{9+1} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

(b) Närmast är R där

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \vec{OQ} + \vec{v}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dvs $R = (-1/2, 1/2)$,

Avg
2022

(3)

(a) $\det(\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}) = \pm \text{volymen.}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \rightarrow \det(\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w}) = -6 - 4 = -10.$$

Svar: volymen är 10.

(b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ så vinkeln är $\pi/2$

(c) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} y & z & x & y \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & -1 \\ -2 & -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Avg.
2022

(4)

$$(a) \quad T(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^t \bar{v}$$

Så matrisen är $\bar{u}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
(en 1×3 -matris).

$$(b) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1 &= 2e_1 & \text{så} \quad e_1 &= \frac{1}{2} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 &= e_1 + e_2 & \text{så} \quad e_2 &= \bar{u}_2 - e_1 = \bar{u}_2 - \frac{1}{2} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ &= \frac{1}{2} \bar{u}_1 + \bar{u}_2 - \frac{1}{2} \bar{u}_2 + e_3 \end{aligned}$$

Matrisen:

$$\text{så} \quad e_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_2$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} S(e_1) & S(e_2) & S(e_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S(\frac{1}{2} \bar{u}_1) & S(\bar{u}_2 - \frac{1}{2} \bar{u}_1) & S(\bar{u}_3 - \bar{u}_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} S(\bar{u}_1) & S(\bar{u}_2) - \frac{1}{2} S(\bar{u}_1) & S(\bar{u}_3) - S(\bar{u}_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \leftarrow \text{Svar.} \end{aligned}$$

⑤ Alternativ 1: Gaußeliminierung.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & -6 & -3 & 1 & -2 & 0 \\
 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 9 & 1 & 2 & -2 \\
 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & -2 & 0 & -2/3 & 1/3 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & -2/9 \\
 1 & 0 & -2 & 0 & -1/3 & 2/3 \\
 0 & -1 & -2 & 0 & -2/3 & 1/3 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & -2/9 \\
 1 & 0 & 0 & 2/9 & -1/3 + 4/9 & 2/3 - 4/9 \\
 0 & -1 & 0 & 2/9 & 4/9 - 2/3 & 1/3 - 4/9 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 2/9 & 1/9 & 2/9 \\
 0 & 1 & 0 & -2/9 & 2/9 & 1/9 \\
 0 & 0 & 1 & 1/9 & 2/9 & -2/9
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} r_1 - 2r_2 \\ r_3 - 2r_2 \end{array}$
 $\begin{array}{l} r_1 - 2r_3 \\ r_3 \cdot \frac{1}{3} \end{array}$
 $\begin{array}{l} r_1 \cdot \frac{1}{9} \\ r_2 + 2r_3 \end{array}$
 $\begin{array}{l} r_2 + 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \end{array}$

So

$$B^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5 forts)

Aug
2022

6

Alternativ 2:

kolumnerna $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ i B

uppfyller

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2 = 0$$

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 = 9$$

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{b}_3 = 0$$

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2 = 9$$

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_3 = 0$$

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{b}_3 = 9$$

Så

$$B^t B = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{b}_2 \cdot \bar{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{b}_3 \cdot \bar{b}_3 \end{pmatrix}$$

$$= 9 I_3$$

och därmed är

$$\left(\frac{1}{9} B^t\right) B = I_3$$

Så

$$B^{-1} = \frac{1}{9} B^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

⑥

Avg
2022

$$\text{Låt } F = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$(a) \det(F) = -8 - 8 + 1 - 4 - 4 - 4 = -27 \neq 0$$

Så F är inverterbar och
därmed $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ en bas för $\mathbb{R}^3$.

$$(b) \text{ Vi har } A_E = F A_F F^{-1}, \text{ så}$$

$$A_F = F^{-1} A_E F.$$

Enligt uppgift 5 är

$$F^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Så

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 15 & 0 \\ 3 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↑
Svar.

7

Avg
2022Egenvärden λ bestäms av

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= \lambda^2(2-\lambda) - 2 + \lambda = \lambda^2(2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= \lambda(2-\lambda)(\lambda^2-1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Så egenvärdena är 2, 1, -1.

$$\lambda=2: \quad A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $(A-2I)\bar{x} = 0$ har lös n. $x_3 = t, x_2 = 2t, x_1 = 4t$ Så en egenvektor är $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda=1$:

$$A-I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så $(A-I)\bar{x} = 0$ har lös n. $x_3 = t, x_2 = t, x_1 = t$ Så en egenvektor är $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda=-1$:

$$A+I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $x_3 = t, x_2 = -t, x_1 = t$ Egenvektor: $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$