Tentamen SSY043
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

5 juni 2024 kl. 08:30-12.30

1. (a) (i) Grundvinkelfrekvens $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ [rad/s]
   (ii) $x(t)$ en jämn signal $\Rightarrow b_n = 0$ ($\sin(\cdot)$ är en udda signal)
   (iii) Signalens medelvärde:
   $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \{T = 10\} = \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{5\cdot 8}{2} = 4$
   (iv) a_n kan beräknas eller tas från Beta-tabellen
   $a_n = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$ för $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$ övriga $a_n = 0$.

   (b) Låt (N, n, k heltal)

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{9}n\right) \quad \text{med} \quad \Omega_1 = \frac{4\pi}{9}$$
$$x_2[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \quad \text{med} \quad \Omega_2 = \frac{3\pi}{4}$$
$$x_1[n + N_1] = \cos\left(\frac{4\pi}{9}(n + N_1)\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{9}n + \frac{4\pi}{9}N_1\right)$$
$$x_2[n + N_2] = \cos\left(\frac{3\pi}{4}(n + N_2)\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n + \frac{3\pi}{4}N_2\right)$$

Signalerna $x_1[n]$ och $x_2[n]$ periodiska om

$$\frac{4\pi}{9}N_1 = k_1 \cdot 2\pi \qquad \frac{3\pi}{4}N_2 = k_2 \cdot 2\pi$$
$$N_1 = \frac{k_1\, 2\pi \cdot 9}{4\pi} = \frac{9}{2}k_1 \qquad N_2 = \frac{k_2\, 2\pi \cdot 4}{3\pi} = \frac{8\,k_2}{3}$$

De båda signalerna fundamentala perioder fås för $k_1 = 2$ och $k_2 = 3$. Alltså $N_1 = 9$ och $N_2 = 8$.
Gemensam fundamental period är $N = N_1 \cdot N_2 = 9 \cdot 8 = 72$ [1]

[1] $x_1[n]$ hinner med 8 perioder och $x_2[n]$ 9 perioder inom $[n, n + N]$.

2.

$$x[n] = (-0.6)^n \, u[n]$$
$$y[n] = 2(0.2^n - (-0.6)^n)u[n] \qquad z\text{-transformera}$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{1+0.6z^{-1}} \\
Y(z) &= \frac{2}{1-0.2z^{-1}} - \frac{2}{1+0.6z^{-1}} = \\
&= \frac{2(1+0.6z^{-1}-1+0.2z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})} = \frac{2\cdot 0.8z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1.6z^{-1}\,(1+0.6z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})} = \frac{1.6z^{-1}}{1-0.2z^{-1}} \\
H(z) &= \frac{1.6}{z-0.2}
\end{aligned}$$

Vidare

$$Y(z)(1-0.2\,z^{-1}) = X(z)1.6\,z^{-1}$$

Invers z-transform ger differensekvation

$$y[n] - 0.2\,y[n-1] = 1.6\,x[n-1]$$

3. Stegsvar $y(t) = 0.1(2 - e^{-5t}(2\cos(10t) + \sin(10t)))u(t)$.

   Laplacetransformera !

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= 0.1\left(\frac{2}{s} - \frac{2(s+5)}{(s+5)^2+10^2} - \frac{10}{(s+5)^2+10^2}\right) = \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{2}{s} - \frac{2s+10+10}{(s+5)^2+10^2}\right) = \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{2}{s} - \frac{2(s+10)}{(s+5)^2+10^2}\right) = \\
&= \frac{2}{10}\left(\frac{(s+5)^2+10^2-s^2-10s}{s[(s+5)^2+10^2]}\right) = \\
&= \frac{2}{10}\left(\frac{125}{s[(s+5)^2+10^2]}\right) = \frac{1}{s}\cdot\left(\frac{25}{(s+5)^2+10^2}\right)
\end{aligned}
$$

   Insignal $x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$. Sambandet $Y(s) = X(s)H(s)$ ger

$$
H(s) = \frac{25}{(s+5)^2+10^2} = \frac{25}{s^2+10s+125}
$$

   Impulssvar $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ vilket ger

$$
h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{2.5\cdot\frac{10}{(s+5)^2+10^2}\right\} = 2.5\,e^{-5t}\sin(10t)\,u(t) \quad .
$$

4. Antal sampel $N = 8$ och $x[n] = [1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 0]$.

   $f_s = 200$ Hz och $f = 50$ Hz. Upplösning $\triangle f = \frac{f_s}{N} = \frac{200}{8} = 25$ Hz.

   $f = 50$ Hz ger $k \cdot \triangle f = 2 \cdot 25 = 50$. Alltså är $k = 2$.

   Beräkna $X[k]$ med $k = 2$ och $N = 8$ enligt

$$X[2] = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{7} x[n] \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$$

   Beräkna varje term i summan där $\Omega = n\frac{\pi}{2}$

n	$x[n]$	Ω	$\cos(\Omega)$	$-j\sin(\Omega)$	Delsuma för varje n
0	1	0	1	0	1
1	0	-	-	-	0
2	1	π	-1	0	-1
3	0	-	-	-	0
4	1	2π	1	0	1
5	2	$5 \cdot \pi/2$	0	-j	-j2
6	1	$6 \cdot \pi/2$	-1	0	-1
7	0	-	-	-	0

   Summering av alla värden i höger kolumn ger $X[2] = -j2$.

5. Systemets impulssvar $h(t) = B\,e^{-at}\,u(t)$.
Systemets överföringsfunktion är

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{B}{s+a} = \frac{\frac{B}{a}}{1+\frac{s}{a}} \ .$$

Och systemets frekvenssvar

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\frac{B}{a}}{1+\frac{j\omega}{a}}$$

Frekvenssvarets amplitudkarakteristik

$$|H(j\omega)| = \frac{|\frac{B}{a}|}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{a})^2}}$$

Stabilt system ger $a > 0$ (pol i VHP samt $h(t) \to 0$ då $t \to \infty$).
Vid låga frekvenser gäller

$$|H(j\omega)|_{\omega\to 0} = \frac{B}{a} = 10 \ , \quad \text{då är även } B > 0 \ \ .$$

Vid $\omega = \omega_1 = \sqrt{3} \cdot 100$ rad/s har amplitudförstärkningen halverats

$$|H(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = \frac{\frac{B}{a}}{\sqrt{1+(\frac{\omega_1}{a})^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B}{a}$$

Då måste $\sqrt{1+(\frac{\omega_1}{a})^2} = 2$ och $(\frac{\omega_1}{a})^2 = 3$.

Vi får $a = \frac{\omega_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 100}{\sqrt{3}} = 100$.

Vidare är $\frac{B}{a} = 10$ som ger $B = 10 \cdot a = 1000$.