

Tentamen SSY042
Signaler och System, Z2

Lösningsförslag

27 augusti 2021 kl. 14:00-18.00

1. (a) Poler: $s_{1,2} = -2 \pm j2$. Överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)} = \\ &= \frac{K}{(s + 2 + j2)(s + 2 - j2)} = \frac{K}{(s + 2)^2 - (j2)^2} = \dots = \\ &= \frac{K}{s^2 + 4s + 8} \end{aligned}$$

Stegsvar: Insignal $x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{s^2 + 4s + 8} = \{\text{PBU}\} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 8} = \\ &= \frac{A}{s} + \underbrace{\frac{Bs + C}{(s + 2)^2 + 4}}_{Y_q(s)} \quad . \end{aligned}$$

Enligt figur går stegsvar mot 10 då $t \rightarrow \infty$. Inverstransform av $Y_q(s)$ ger dämpade (e^{-2t}) sinusformade signaler. De går mot 0 då $t \rightarrow \infty$. Kvar blir inverstransform av $\frac{A}{s}$ som ger bidrag då $t \rightarrow \infty$. Alltså $A = 10$. Utveckla PBU.

$$K = A(s^2 + 4s + 8) + (Bs + C)s$$

För $s = 0$ blir $K = A \cdot 8 = 80$.

$$\boxed{\text{Svar: } a_1 = 4, a_0 = 8, K = 80}$$

Alternativt sätt att lösa ut K . Använd slutvärdessatsen:

$$y(t)|_{t \rightarrow \infty} = sY(s)|_{s \rightarrow 0} = \dots = \frac{K}{8} = 10 \quad .$$

- (b) Samplingsfrekvens $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.020} = 100\pi$ rad/s.

Signalvinkelfrekvens hos $x_1(t)$ är $\omega_1 = 38\pi$ rad/s. $\omega_1 < \frac{\omega_s}{2}$ betyder ingen aliasing. Aliasing med lika $|\text{DFT}|$ uppkommer om $\omega_2 = \omega_s - \omega_1 = (100 - 38)\pi = 62\pi$ rad/s. Vinkelrekvensen ω_2 "viks ner" (aliasing) enligt $\omega_s - \omega_2$ och ger samma $|\text{DFT}|$ som x_1 med vinkelfrekvens ω_1 . För signal $x_2(t)$ är $\omega_2 > \frac{\omega_s}{2}$ vilket betyder aliasing. Signalernas fas saknar betydelse då beloppet av DFT studeras.

$$\boxed{\text{Svar: } \omega_2 = 62\pi \text{ rad/s.}}$$

2. Differentialekvation

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t) + \frac{dx(t)}{dt} + 4 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \quad .$$

Laplacetransformera.

$$s^2 Y(s) + Y(s) = X(s) + sX(s) + 4s^2 X(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 1) = X(s)(4s^2 + s + 1)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s^2 + s + 1}{s^2 + 1}$$

Stegsvar: Insignal $x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$.

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{4s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)} = \{\text{PBU}\} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

Utveckla PBU.

$$4s^2 + s + 1 = A(s^2 + 1) + s(Bs + C) = A(s^2 + 1) + Bs^2 + sC$$

$$s^0 : 1 = A$$

$$s^1 : 1 = C$$

$$s^2 : 4 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = 3$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

Stegsvar:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (1 + 3\cos(t) + \sin(t)) u(t)$$

3. Använd z -transform. Impulssvar

$$h[n] = 2n 0.5^n u[n] \longleftrightarrow H(z) = 2 \frac{0.5 z}{(z - 0.5)^2} = \frac{z}{(z - 0.5)^2}$$

$$\text{Insignal } x[n] = u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Stegsvar

$$Y(z) = X(z) H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-0.5)^2} \quad .$$

'Spara undan' ett z och partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-1)(z-0.5)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{C}{(z-0.5)^2} \\ z &= A(z-0.5)^2 + B(z-1)(z-0.5) + C(z-1) \quad (*) \\ z &= A(z^2 - z + 0.25) + B(z^2 - 1.5z + 0.5) + Cz - C \end{aligned}$$

Bilda ekvationssystem och beräkna konstanterna

$$\begin{aligned} [z^0] : \quad 0 &= 0.25A + 0.5B - C \\ [z^1] : \quad 1 &= -A - 1.5B + C \\ [z^2] : \quad 0 &= A + B \end{aligned}$$

Lös ekv. system. Insättning i ekv (*) ger snabbt resultat

$$\begin{aligned} [z = 0.5] : \quad 0.5 &= C(0.5 - 1) \Rightarrow C = -1 \\ [z = 1] : \quad 1 &= A(1 - 0.5)^2 \Rightarrow A = 4 \text{ och } B = -4 \end{aligned}$$

$$Y(z) = 4 \frac{z}{z-1} - 4 \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{(z-0.5)^2}$$

Stegsvar

$$y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = [4 - 4(0.5)^n - 2n(0.5)^n] u[n]$$

4. Insignal $x(t)$ beskrivs med Fourierserien

$$x(t) = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n} \cos(2n t) \quad .$$

Systemets impulssvaret

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-4t}u(t) \quad .$$

Laplaceformerna. $H(s) = 1 - \frac{3}{s+4} = \frac{s+4}{s+4} - \frac{3}{s+4} = \frac{s+1}{s+4}$

Frekvenssvar (Fouriertransform). Sätt $s = j\omega$.

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{4 + j\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{4^2 + \omega^2}} \quad \text{amplitudförändring}$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) \quad \text{fasförändring}$$

Tre vinkelfrekvenser ingår i $x(t)$. Beräkna amplitud- och fasförändring för dessa tre vinkelfrekvenser: $\omega = 2, 4$ och 6 rad/s.

n	1/n	ω	$ H(j\omega) $	$\frac{1}{n} \cdot H(j\omega) $	$\arg\{H(j\omega)\} [grader]$
1	1	2	0.50	0.50	36.9
2	1/2	4	0.73	0.36	31.0
3	1/3	6	0.84	0.28	24.2

Amplitud och fasförändring enligt tabell ovan.

Systemets utsignal blir

$$y(t) = 0.50 \cos(2t + 36.9^\circ) + 0.36 \cos(4t + 31.0^\circ) + 0.28 \cos(6t + 24.2^\circ)$$

5. Differentialekvation

$$\frac{dy(t)}{dt} + t^2 y(t) = (5+t)x(t) \quad . \quad (1)$$

Välj några olika insignaler: $x_1(t)$ och $x_2(t)$ som ger upphov till utsignalerna $y_1(t)$ respektive $y_2(t)$. Sätt in i ekvation (1).

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + t^2 y_1(t) = (5+t)x_1(t) \quad (2)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + t^2 y_2(t) = (5+t)x_2(t) \quad (3)$$

Multiplikera ekvation (2) med a och ekvation (3) med b där a och b är konstanter.

$$a \frac{dy_1(t)}{dt} + a t^2 y_1(t) = a (5+t) x_1(t) \quad (4)$$

$$b \frac{dy_2(t)}{dt} + b t^2 y_2(t) = b (5+t) x_2(t) \quad (5)$$

Summera ihop ekvationerna (4) och (5).

$$\frac{d(ay_1(t) + by_2(t))}{dt} + t^2 (ay_1(t) + by_2(t)) = (5+t) (ax_1(t) + bx_2(t)) \quad (6)$$

Vi ser att för insignalen $ax_1(t) + bx_2(t)$ blir utsignalen $ay_1(t) + by_2(t)$.
Systemet är linjärt.