

MATEMATIK

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

MVE750 Analys i en variabel

Tentamensdatum: 2025-10-28, 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Endast godkända miniräknare tillåtna. Inga andra hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 20-29 poäng: 3, 30-39 poäng: 4, 40-50 poäng: 5.

Examinator: Anna Karlsson, 0721-575850.

Beräkningar ska motiveras och redovisas utförligt och fullständigt. Det är i huvudsak beräkningar, resonemang och motiveringar som ger poäng. **Endast svar ger inga poäng.**

1. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-3}\right)^x$. (5p)

2. Approximera $\sin \frac{\pi}{5}$ genom att använda ett Taylorpolynom av ordning 2. Bestäm felets tecken och uppskatta felets storlek. (8p)

3. Hitta (lokala) max- och minpunkter till $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$. Ange var $f(x)$ är växande respektive avtagande, ange eventuella inflexionspunkter, och skissa grafen. (9p)

4. (a) Beräkna $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x^4} dx$. (3p)

(b) Beräkna $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$. (4p)

5. (a) Bestäm arean av regionen i planet som begränsas av kurvorna $y = x^3 - 8x$ och $x^3 = -y$. (3p)

(b) Beräkna längden av $C : \mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (4p)

6. Bestäm om följande punkter ligger i samma plan: $P_1 = (3, -1, 3)$, $P_2 = (-2, 1, 3)$, $P_3 = (6, 3, 1)$ och $P_4 = (2, 2, 2)$. (6p)

7. Givet att vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ har längderna $|\mathbf{a}| = 2$ och $|\mathbf{b}| = 3$, bestäm de värden av skalären λ för vilka vektorerna $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}$ blir vinkelräta mot varandra. (3p)

8. (a) Ange definitionen av att en funktion är deriverbar i en punkt. (2p)

(b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i den punkten. (3p)

Lycka till!

FORMELBLAD

Några integraler

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right) + C$$