

1 Uppgift 1

Lösning:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{3}{x-3})}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x-3}\right) &= \left[t = \frac{3}{x-3}\right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(3 + \frac{3}{t}\right) \ln(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (3t+3) \frac{\ln(1+t)}{t} = (0+3) \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

och eftersom e^x är kontinuerlig gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{3}{x-3})} = e^3.$$

Svar: e^3 .

2 Uppgift 2

Lösning: Taylorpolynomet av ordning 2 av en funktion $f(x)$ runt $x = a$ ges av:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Vi har $f(x) = \sin x$ och sätter $a = \frac{\pi}{6}$. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ ger

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow P_2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Approximationen ges av

$$\sin \frac{\pi}{5} \approx P_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{20\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3600}$$

Felet vid approximationen ges av

$$E_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{f'''(s)}{3!} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6}\right)^3, \quad s \in I = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right),$$

Eftersom $f'''(x) = -\cos x$ gäller

$$E_2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \underbrace{-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3}_{<0} \underbrace{\cos s}_{>0, s \in I} < 0, \quad s \in I,$$

och felet har ett negativt tecken. För felets storlek gäller att

$$\left|E_2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3 \cos s < \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3, \quad s \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{5}\right),$$

eftersom $\cos s$ är strängt avtagande på $J = (0, \pi/2)$ (följer från att derivatan är $-\sin x < 0$ på J).

Svar:

$$\sin \frac{\pi}{5} \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{20\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{3600}. \text{ Felet har ett negativt tecken, och } \left|E_2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| < \frac{\pi^3}{108000\sqrt{3}}.$$

3 Uppgift 3

Lösning: $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1/x - 1}}_{\rightarrow 0} = 0 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = e^0 = 1, \text{ ty } e^x \text{ är kontinuerlig.}$$

$$\frac{1}{1-x} \begin{cases} \nearrow -\infty & \text{då } x \rightarrow 1^+ \\ \searrow \infty & \text{då } x \rightarrow 1^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow 0 & \text{då } x \rightarrow 1^+ \\ e^{\frac{1}{1-x}} \rightarrow \infty & \text{då } x \rightarrow 1^- \end{cases}$$

så $y = 1$ är asymptot då $x \rightarrow \pm\infty$, och $x = 1$ är asymptot då $x \rightarrow 1^-$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(-1)^2}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} > 0, \quad D_{f'} = D_f$$

dvs. f är strängt växande på $(-\infty, 1)$ respektive $(1, \infty)$. Ändpunkter, kritiska punkter och singulära punkter saknas, så (lokala) extrempunkter saknas.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}} + \frac{1}{(1-x)^4} e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{3-2x}{(1-x)^4} e^{\frac{1}{1-x}}, \quad D_{f''} = D_f \\ &= \underbrace{\frac{2}{(1-x)^4} e^{\frac{1}{1-x}}}_{>0} \left(\frac{3}{2} - x \right) \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{då } x < 3/2 \\ f''(x) = 0 & \text{då } x = 3/2 \\ f''(x) < 0 & \text{då } x > 3/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Eftersom $f''(x)$ växlar tecken i $x = 3/2$ är det en inflexionspunkt.

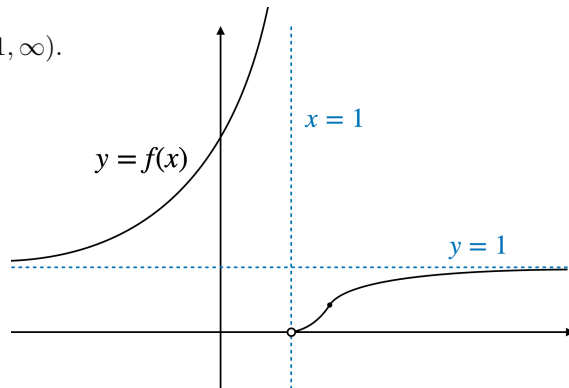
(Med fördel sammanställs även resultatet ovan i en teckentabell. Notera att $f(x) > 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-2}$.)

Svar: (Lokala) extrempunkter saknas.

f är (strängt) växande på $(-\infty, 1)$ respektive $(1, \infty)$.

$x = 3/2$ är en inflexionspunkt.

Grafen (ej skalenlig) skissas till något liknande:



4 Uppgift 4

Lösning:

$$\begin{aligned} \text{(a) PBUD:} \quad \frac{x^3 - 1}{x^2 + x^4} &= \frac{x^3 - 1}{x^2(1 + x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{1 + x^2} \\ \Leftrightarrow x^3 - 1 &= Ax(1 + x^2) + B(1 + x^2) + (Cx + D)x^2 \\ x^0: \quad -1 &= B \\ x^1: \quad 0 &= A \\ x^2: \quad 0 &= B + D \quad \Leftrightarrow \quad D = -B = 1 \\ x^3: \quad 1 &= A + C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1 - A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x^4} dx &= - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x + 1}{1 + x^2} dx = - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \arctan x + C \end{aligned}$$

$$(b) \quad \int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} u = -\sqrt{x} \\ du = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right] = - \int 2u^2 e^u du \stackrel{PI}{=} -2u^2 e^u + 4 \int u e^u du$$

$$\stackrel{PI}{=} -2u^2 e^u + 4u e^u - 4 \int e^u du = (-2u^2 + 4u - 4)e^u + C = (-2|x| - 4\sqrt{x} - 4)e^{-\sqrt{x}} + C$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx = \left[(-2x - 4\sqrt{x} - 4)e^{-\sqrt{x}} \right]_0^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} (-2R - 4\sqrt{R} - 4)e^{-\sqrt{R}} - (-4) = 0 + 4 = 4$$

Svar: (a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x + C$. (b) 4.

5 Uppgift 5

Lösning:

(a) Skärningspunkterna mellan $y = f(x) = x^3 - 8x$ och $y = g(x) = -x^3$ ges av

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 2, 0\}.$$

$$\Rightarrow A = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |2x^3 - 8x| dx = [\text{jämn integrand}] = 2 \int_0^2 |2x^3 - 8x| dx$$

och eftersom $2x^3 - 8x = 2x(x-2)(x+2) \leq 0, \forall x \in [0, 2]$ gäller

$$A = 2 \int_0^2 (8x - 2x^3) dx = 2 \left[4x^2 - \frac{x^4}{2} \right]_0^2 = 2(16 - 8) - 0 = 16.$$

(b) Kurvan $C : \mathbf{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ har längden $L = \int_C ds$ där

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad \mathbf{r}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) = 3\sin t \cos t (-\cos t, \sin t)$$

$$\Rightarrow ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = 3|\sin t \cos t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 3|\sin t \cos t| dt$$

$$\Rightarrow L = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3}{2} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{2}.$$

Svar: (a) $A = 16$. (b) $L = 3/2$.

6 Uppgift 6

Lösning: De fyra punkterna ligger i samma plan om $\overrightarrow{P_1 P_2} \perp (\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_4})$, dvs. om $\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_4}) = 0$.

$$\overrightarrow{P_i P_j} = \overrightarrow{OP_j} - \overrightarrow{OP_i} \Rightarrow \overrightarrow{P_1 P_2} = (-5, 2, 0), \quad \overrightarrow{P_1 P_3} = (3, 4, -2), \quad \overrightarrow{P_1 P_4} = (-1, 3, -1).$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\overrightarrow{P_1 P_3} \times \overrightarrow{P_1 P_4}) = (-5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 4(-1) + 2(-2)(-1) + 3^2 \cdot 0 - [-5(-2)3 + 2 \cdot 3(-1) + 0 \cdot 4(-1)] = 20 + 4 - 30 + 6 = 0.$$

Svar: De fyra punkterna ligger i samma plan.

7 Uppgift 7

Lösning:

$$(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b}) \Leftrightarrow 0 = (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \lambda \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \lambda^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - \lambda^2 |\mathbf{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{a}|^2 = \lambda^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{2^2}{3^2} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{2}{3}.$$

Svar: $\lambda = \pm \frac{2}{3}$.