1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx$$

Lösning: a) Integranden är kontinuerlig på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ så integralen är generaliserad, med

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx = \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx}_{=I_2}$$

De primitiva funktionerna till integranden ges av

$$\int \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1+x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = F(x) + C$$

Eftersom gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \arctan 0 + \frac{1}{2}\ln 1 = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = \arctan(-1) + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}$$

alla existerar är både I_1 och I_2 konvergenta. Därför också den efterfrågade integralen konvergent, med

$$\begin{aligned} I = \Big[F(x)\Big]_0^1 + \Big[F(x)\Big]_{-1}^0 &= \lim_{x\to 1^-} F(x) - \lim_{x\to 0^+} F(x) + \lim_{x\to 0^-} F(x) - \lim_{x\to -1^+} F(x) \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} - 0 + 0 - \left(-\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) Integranden är kontinuerlig på $[1,\infty)$, och integralen är generaliserad.

$$\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = -1/x^2 \\ dt = \frac{2}{x^3}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{-1/x^2}}{2} + C$$

ger att[1] $G(x) = \dfrac{e^{-1/x^2}}{2}$ är en primitiv funktion till integranden, och eftersom båda gränsvärdena

$$\lim_{x\to 1^+} G(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-1/x^2}}{2} = \frac{e^{-1}}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{2} = \left[t = -\frac{1}{x^2}\right] = \lim_{t\to 0^-} \frac{e^t}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

existerar, gäller

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \Big[G(x)\Big]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} G(x) - \lim_{x\to 1^+} G(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1-1/e}{2}$$

Svar:

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} \frac{x+x^2}{x^3+x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b)} \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \frac{1-1/e}{2}$$

[1] Man kan också använda

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t = -1/x^2 \\ dt = \frac{2}{x^3}dx \end{bmatrix} = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{1}{2}\int_{-1}^{\delta} e^t\,dt = \begin{bmatrix} e^t \text{ kontinuerlig på } [-1,0] \\ \Rightarrow \text{ konvergent integral} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^t dt$$

Ett motsvarande argument kan även användas i uppgift a), för I_1 och I_2. (OBS! Efter att integralen I delats upp.)

2 Uppgift 2

Uppgift: Betrakta följande geometriska serie:

$$3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$$

Skriv serien med summabeteckning och beräkna summan av serien.

Lösning: Vi har att termerna i serien beskriver en geometrisk talföljd med $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ och $a_3 = \frac{1}{3}$. Talföljdens kvot q är

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3}$$

och vi har

$$a_k = a_1 q^{k-1}\,,$$

så serien ges av

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$$

Serien är konvergent eftersom $|q| = 1/3 < 1$, och seriens summa ges av

$$s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{1-1/3} = \frac{3}{2/3} = \frac{9}{2}\,.$$

Svar:

$$3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{9}{2}\,.$$

3 Uppgift 3

Uppgift: Ställ upp en Riemannsumma som approximerar arean som motsvarar $\displaystyle\int_0^2 (2-x)dx$ via en uppdelning i n stycken delintervall, och beräkna summan samt gränsvärdet som ger den bestämda integralen.

Lösning: Vi delar upp intervallet $[0,2]$ via $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ och sätter $x_k = \frac{2k}{n}$ så att $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{2}{n}$. Riemannsumman kan då skrivas som

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

där $f(x) = 2 - x$ och $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Vi sätter[2] $\xi_k = x_k$ och får

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)\,.$$

Detta är en aritmetisk summa över de n första termerna i en talföljd $(a_k)_{k=0}^{n}$ där

$$a_k = a_1 + (k-1)d = 2 - \frac{2k}{n}$$

Alltså gäller

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = [\text{aritmetisk summa}] = \frac{2}{n} n \frac{a_1 + a_n}{2} = a_1 + a_n = \left(2 - \frac{2}{n}\right) + (2-2) = 2 - \frac{2}{n}$$

Svar:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n} = 2 - \frac{2}{n} \to 2 + 0 = 2 \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

[2]Det går lika bra att t.ex. sätta $\xi_k = x_{k-1}$. Man får då $a_k = 2 - \frac{2(k-1)}{n}$ i den fortsatta lösningen.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

(a) $y'(x) = 2x^3 - 2xy(x)$

(b) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 10\sin x$

(c) $\begin{cases} y'(x) - 2xy^2(x) = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Lösning: **Uppgift a)**:

$$y'(x) = 2x^3 - 2xy(x) \quad \Leftrightarrow \quad y' + 2xy = 2x^3$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn e^{x^2}. Då har vi

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = e^{x^2}(y' + 2xy) = 2x^3e^{x^2}$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right)dx = \int 2x^3e^{x^2}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int te^t dt \overset{PI}{=} te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t + C = (x^2-1)e^{x^2} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad ye^{x^2} = (x^2-1)e^{x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x^2 - 1 + Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uppgift b):

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 10\sin x \tag{4.1}$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = r^2 - 4r + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 4r = -3 \quad \Leftrightarrow \quad (r-2)^2 = -3 + 4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2 \pm 1$$

och har rötterna $r_1 = 3$ och $r_2 = 1$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = Ae^{3x} + Be^x$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $10\sin x$ ansätter vi:

$$y_p(x) = D\cos x + E\sin x$$

där D, E är konstanter. Vi har

$$y_p'(x) = -D\sin x + E\cos x \qquad y_p''(x) = -D\cos x - E\sin x = -y_p(x)$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 3y_p = -y_p - 4y_p' + 3y_p = -4y_p' + 2y_p &= 10\sin x \\ \Leftrightarrow \quad -4(-D\sin x + E\cos x) + 2(D\cos x + E\sin x) &= 10\sin x \\ \Leftrightarrow \quad (-4E + 2D)\cos x + (4D + 2E)\sin x &= 10\sin x \end{aligned}$$

där likhet för alla x kräver

$$\begin{cases} 2(D - 2E) = 0 \\ 2(2D + E) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2E \\ 2D + E = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2E \\ 5E = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2 \\ E = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = 2\cos x + \sin x\,.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{3x} + Be^x + 2\cos x + \sin x \qquad (A, B \text{ godtyckliga konstanter})$$

Uppgift c):

$$y'(x) - 2xy^2(x) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad y' = 2x(1+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{1+y^2} = 2x$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+y^2}dy = 2xdx$$

Integration av båda led ger

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \quad \arctan y = x^2 + C$$
$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \tan\left(x^2 + C\right)$$

Via insättning i differentialekvationen kan uttrycket för $y(x)$ verifieras gälla för alla $(x^2 + C) \in D_{\tan}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger villkoret

$$y(0) = \tan C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tan x^2$$

Svar:
a) $y(x) = x^2 - 1 + Ce^{-x^2}$ b) $y(x) = Ae^{3x} + Be^{x} + 2\cos x + \sin x$ c) $y(x) = \tan x^2$

5 Uppgift 5

Uppgift: Beräkna arean av det område som begränsas av graferna till $f(x) = 4(x-2)$ och $g(x) = x^3 - 8$.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy-planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4(x-2) = x^3 - 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 - 4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2) = g(x) - f(x)$$

Vi har tre skärningspunkter, $x \in \{-2, 0, 2\}$. Arean begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = -2$ och $x = 2$. $f(x) < g(x)$ då $x \in (-2, 0)$ och $f(x) > g(x)$ då $x \in (0, 2)$. Arean av området ges av

$$A = \int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{2} |4x - x^3|\, dx = [\text{jämn integrand}] = 2\int_{0}^{2} |4x - x^3|\, dx$$
$$= 2\int_{0}^{2} (4x - x^3)\, dx = 2\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2\left(2^3 - \frac{2^4}{4} - 0\right) = 2(8-4) = 8$$

Svar: $A = 8$.

6 Uppgift 6

För en svängande (matematisk) pendel gäller att om $y(t)$ är vinkeln från jämviktsläget som funktion av tiden, så är vinkelaccelerationen proportionell mot $\sin y$, med en negativ proportionalitetskonstant, så att pendeln accelereras tillbaka mot jämviktsläget. För små pendelutslag är vinkeln liten, och då kan man hitta en approximativ lösning till $y(t)$ genom att ersätta $\sin y$ med y. Bestäm en sådan approximativ lösning för vinkeln som funktion av tiden genom att lösa en lämplig differentialekvation. Antag att pendeln vid tiden noll passerar jämviktsläget med en vinkelhastighet om π radianer per sekund.

Observera att om $y(t)$ anger en vinkel, så är $y'(t)$ en vinkelhastighet och $y''(t)$ en vinkelacceleration.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva vinkeln från jämviktsläget i radianer som funktion av tiden (i sekunder). Det aktuella begynnelsevärdesproblemet ges av

$$\begin{cases} y''(t) = -\omega^2 y(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \pi \end{cases}$$

där $\omega > 0$ är en konstant. Vi har att

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

är en linjär, homogen differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter, vars karaktäristiska ekvation ges av

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = -\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i\omega$$

och har rötterna $r_{1,2} = \pm i\omega$. Den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen ges därför av

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Begynnelsevillkoren ger därefter att

$$y(0) = A = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = B\sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y'(t) = \omega B\cos(\omega t)$$

och

$$y'(0) = \omega B = \pi \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\pi}{\omega}\,.$$

Svar: Vinkeln från jämviktsläget, i radianer vid tiden t sekunder, ges av $y(t) = \frac{\pi}{\omega}\sin(\omega t)$, där $\omega > 0$ är en konstant.