# 1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{2}{x(1+x^2)}\,dx \qquad \text{(b)} \int_{-1}^2 e^x(2x+1)\,dx \qquad \text{(c)} \int_1^4 \frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

Lösning:
a) För att bestämma om den generaliserade integralen är konvergent tar vi fram en primitiv funktion till integranden. Vi ansätter en partialbråksuppdelning enligt:

$$\frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} & 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ x^0: \quad & 2 = A \\ x^1: \quad & 0 = C \\ x^2: \quad & 0 = A + B \quad \Leftrightarrow \quad B = -A = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2}{x(1+x^2)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 2\ln|x| - \ln|1+x^2| + C = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + C = F(x) + C$$

Eftersom

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{x^{-2}+1}\right) = \ln 1 = 0$$

och

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

är integralen konvergent, och

$$\int_1^\infty \frac{2}{x(1+x^2)}\,dx = \big[F(x)\big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to 1^+} F(x) = 0 - (-\ln 2) = \ln 2\,.$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \int_{-1}^2 e^x(2x+1)\,dx &\overset{PI}{=} \big[e^x(2x+1)\big]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 2e^x\,dx = \big[e^x(2x+1) - 2e^x\big]_{-1}^2 = \big[e^x(2x-1)\big]_{-1}^2 \\ &= 3e^2 - (-3e^{-1}) = 3e^2 + 3/e = 3(e^2 + 1/e) \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \int_1^4 \frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+\sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{bmatrix} = 2\int_2^3 \sin t\,dt = \big[-2\cos t\big]_2^3 = -2(\cos 3 - \cos 2)$$

Svar:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \int_0^\infty \frac{2}{x(1+x^2)}\,dx = \ln 2 \\ \text{b)} \quad & \int_{-1}^2 e^x(2x+1)\,dx = 3(e^2 + 1/e) \\ \text{c)} \quad & \int_0^4 \frac{\sin(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2(\cos 2 - \cos 3) \end{aligned}$$

## 2 Uppgift 2

Uppgift: För den aritmetiska talföljden $a_1$, $a_2$, ... är $a_1 = -2$ och $a_2 = -6$. Bestäm talföljdens differens och beräkna

$$\sum_{k=1}^{40} a_k$$

Lösning: Talföljdens differens $d$ är

$$d = a_2 - a_1 = -6 - (-2) = -4\,.$$

Vi har

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\frac{a_1 + a_n}{2} = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right) = \begin{bmatrix} n = 40 \\ d = -4 \\ a_1 = -2 \end{bmatrix} = 40(-2+39\cdot(-2)) = 40\cdot(-2)\cdot 40 = -2\cdot 1600 = -3200\,.$$

Svar: Talföljdens differens är $d = -4$ och summan är $-3\,200$.

## 3 Uppgift 3

Uppgift: Ställ upp en Riemannsumma som approximerar arean som motsvarar $\displaystyle\int_0^1 e^x dx$ via en uppdelning i $n$ stycken delintervall, och beräkna summan.

Lösning: Vi delar upp intervallet $[0,1]$ via $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ och sätter $x_k = \frac{k}{n}$ så att $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$. Riemannsumman kan då skrivas som

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

där $f(x) = e^x$ och $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Vi sätter[1] $\xi_k = x_k$ och får

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} e^{k/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e^{1/n})^k\,.$$

Detta är en geometrisk summa över de $n$ första termerna i en talföljd $(a_k)_{k=0}^{n}$ där

$$a_k = a_1 q^{k-1} = e^{1/n}(e^{1/n})^{k-1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = q = e^{1/n} \neq 1\,.$$

Alltså gäller

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e^{1/n})^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = [\text{geometrisk summa}] = \frac{1}{n}a_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{e^{1/n}}{n}\,\frac{1-e}{1-e^{1/n}}\,.$$

Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k/n}\frac{1}{n} = \frac{e^{1/n}}{n}\frac{1-e}{1-e^{1/n}}$.

[1] Det går lika bra att t.ex. sätta $\xi_k = x_{k-1}$. Man får då $a_1 = 1$ och $q = e^{1/n}$ i den fortsatta lösningen.

# 4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

(a) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x$

(b) $\begin{cases} y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x\,, \quad x > 0 \\ y(1) = e \end{cases}$

(c) $y'(x) - y(x)\ln[y(x)] = 0$

Lösning: **Uppgift a)**:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x \tag{4.1}$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2r = -1 \quad \Leftrightarrow \quad (r-1)^2 = 1 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$$

och har en rot $r_{1,2} = 1$ av multiplicitet 2. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = (Ax + B)e^x$$

där $A, B$ är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $x$ ansätter vi:

$$y_p(x) = x^m(Dx + E) \overset{m=0}{=} Dx + E$$

där $D, E$ är konstanter och $m = 0$ eftersom den lägsta ordningens derivata av $y(x)$ i differentialekvationen är noll. Vi har

$$y_p'(x) = D \qquad y_p''(x) = 0$$

och insättning av $y_p$ i ekvationen (4.1) ger

$$\begin{aligned} 0 - 2D + (Dx + E) &= x \\ \Leftrightarrow \quad Dx + (E - 2D) &= x \end{aligned}$$

där likhet för alla $x$ kräver

$$\begin{cases} D = 1 \\ E - 2D = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} D = 1 \\ E = 2D = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = x + 2\,.$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (Ax + B)e^x + x + 2$$

där $A, B$ är godtyckliga konstanter.

**Uppgift b)**:

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = x\,, \quad x > 0$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn $e^{-2\ln x} = x^{-2}$. Då har vi

$$\frac{d}{dx}\left(yx^{-2}\right) = y'x^{-2} - 2yx^{-3} = x^{-2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = x^{-1}$$

Integration av VL och HL m.a.p. $x$ ger då

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right)dx = \int \frac{1}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x^2} = \ln x + C \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x^2\ln x + Cx^2\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Begynnelsevillkoret $y(1) = e$ ger villkoret

$$y(1) = \ln(1) + C = C = e \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2\ln x + e\,x^2$$

**Uppgift c)**:

$$y'(x) - y(x)\ln[y(x)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = y\ln y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y\ln y} = 1$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{1}{y\ln y}\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y\ln y}dy = dx$$

Integration av båda led ger

$$\underbrace{\int dx}_{=x+C} = \int \frac{1/y}{\ln y}\,dy = [f(y) = \ln y] = \int \frac{f'(y)}{f(y)}\,dy = \ln|f(y)| + D = [f(y) = \ln y] = \ln|\ln y| + D$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|\ln y| = x + E \quad \Leftrightarrow \quad |\ln y| = e^{x+E} \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = Fe^x\,, \quad F \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = e^{Fe^x}$$

Via insättning i differentialekvationen syns även att $y(x) = 1$, dvs. lösningen med $F = 0$, är en lösning.

$$\Rightarrow \quad y(x) = e^{Fe^x}\,, \quad F \in \mathbb{R}.$$

Svar:
a) $y(x) = (Ax + B)e^x + x + 2$ b) $y(x) = x^2\ln x + e\,x^2$ c) $y(x) = e^{Fe^x}$

## 5 Uppgift 5

Uppgift: Låt $D$ vara området i $xy$-planet som begränsas av graferna till $f(x) = x^2$ och $g(x) = x$. Beräkna volymen av den kropp som fås då $D$ roteras kring $y$-axeln.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i $x$) som graferna begränsar ett område i $xy$-planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0$$

Vi har två skärningspunkter, $x \in \{0, 1\}$. Arean begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = 0$ och $x = 1$. Båda funktionerna är kontinuerliga och $0 \leq f(x) \leq g(x)$ då $x \in [0, 1]$, så volymen av rotationsobjektet ges via metoden med cylindriska skal av

$$V = 2\pi\int_0^1 x(g(x) - f(x))dx = 2\pi\int_0^1 x(x - x^2)dx = 2\pi\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0\right) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Svar: $V = \dfrac{\pi}{6}$.

# 6 Uppgift 6

Vi studerar antalet bakterier i en bakteriekultur. Varje bakterie delar sig en gång per dag, och tio bakterier om dagen dör på grund av yttre påverkan. Bestäm ett uttryck för bakteriekulturens storlek i termer av antalet bakterier som en funktion av tiden, genom att lösa en lämplig differentialekvation. Antag att bakteriekulturen till att börja med bestod av 30 bakterier.

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva antalet bakterier som en funktion av tiden (i dagar). Det aktuella begynnelsevärdesproblemet ges av

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - 10 \\ y(0) = 30 \end{cases}$$

Vi har att

$$y' - y = -10$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen, vars integrerande faktor ges av $e^{-t}$. Vi multiplicerar differentialekvationen med den integrerande faktorn och får

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{-t}\right) = y'e^{-t} - ye^{-t} = -10e^{-t}$$

Integration av båda led ger

$$\int \frac{d}{dt}\left(ye^{-t}\right) dt = -\int 10e^{-t}dt \quad \Leftrightarrow \quad ye^{-t} = 10e^{-t} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = 10 + Ce^{t}$$

Begynnelsevillkoret ger därefter att

$$y(0) = 10 + C = 30 \quad \Leftrightarrow \quad C = 20 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 20e^{t} + 10$$

Svar: Antalet bakterier som en funktion av tiden (i dagar) ges av $y(t) = 20e^{t} + 10$.