1 Uppgift 1

Uppgift: Beräkna följande integraler:

$$\text{(a)} \int (x^2+x)\cos(-x)\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{1+x}{x+x^3}\,dx \qquad \text{(c)} \int_0^8 \frac{1}{x+x^{1/3}}\,dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int (x^2+x)\cos(-x)\,dx = \int (x^2+x)\cos(x)\,dx &\overset{PI}{=} (x^2+x)\sin(x) - \int (2x+1)\sin(x)\,dx \\ &\overset{PI}{=} (x^2+x)\sin(x) + (2x+1)\cos(x) - \int 2\cos(x) \\ &= (x^2+x)\sin(x) + (2x+1)\cos(x) - 2\sin(x) + C \end{aligned}$$

För att lösa b) gör vi en partialbråksuppdelning. Vi har

$$\int \frac{1+x}{x+x^3} = \int \frac{1+x}{(x^2+1)x}$$

och ansätter partialbråksuppdelningen

$$\frac{1+x}{(x^2+1)x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x}$$

Likhet mellan VL och HL kräver

$$\begin{aligned} & 1+x = (Ax+B)x + C(x^2+1) \\ x=0: \quad & 1 = C \\ x^2: \quad & 0 = A+C \quad \Leftrightarrow \quad A = -C = -1 \\ x^1: \quad & 1 = B \\ \Rightarrow \quad & \frac{1+x}{(x^2+1)x} = \frac{(-x+1)}{(x^2+1)} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \frac{1+x}{(x^2+1)x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \int_0^8 \frac{1}{x+x^{1/3}}\,dx &= \begin{bmatrix} x = z^3 \\ dx = 3z^2dz \end{bmatrix} = 3\int_0^2 \frac{z^2}{z^3+z}\,dz = 3\int_0^2 \frac{z}{z^2+1}\,dz \\ &= \frac{3}{2}\left[\ln(z^2+1)\right]_0^2 = \frac{3}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{3\ln 5}{2} \end{aligned}$$

Svar:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \int (x^2+x)\cos(-x) = (x^2+x-2)\sin(x) + (2x+1)\cos(x) + C \\ &\text{b)} \int \frac{1+x}{x+x^3}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + C \\ &\text{c)} \int_0^8 \frac{1}{x+x^{1/3}}\,dx = \frac{3\ln 5}{2} \end{aligned}$$

2 Uppgift 2

Uppgift: Hitta en geometrisk talföljd $a_1, a_2, \ldots$ sådan att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 27$.

Lösning: Elementen i en geometrisk talföljd ges av $a_k = a_1 q^{k-1}$ där q är talföljdens kvot. För att en geometrisk serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ska vara konvergent krävs att $-1 < q < 1$, och då ges dess summa av

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Den sökta serien ska alltså ha a_1 och $-1 < q < 1$ sådana att

$$\frac{a_1}{1-q} = 27\,.$$

T.ex. kan vi välja $q = 1/3$,

$$\Rightarrow \quad 27 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-1/3} = \frac{3a_1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 18\,.$$

Svar: Den geometriska talföljden $18, 6, 2, \ldots$ har $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 27$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-3k+2} = 1 - \frac{1}{n-1}$$

för alla heltal $n \geq 3$.

Lösning:

Utsaga: $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2-3k+2} = 1 - \frac{1}{n-1}$ för alla heltal $n \geq 3$.

Bevis:

- Då $n = 3$ gäller att

$$VL = \sum_{k=3}^{3} \frac{1}{k^2-3k+2} = \frac{1}{3^2-3^2+2} = \frac{1}{2}$$

$$HL = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\Bigg|_{n=3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  $VL = HL$. Därmed är utsagan är sann för $n = 3$.

- Antag att

$$\sum_{k=3}^{m} \frac{1}{k^2-3k+2} = 1 - \frac{1}{m-1}$$

  för något heltal $m \geq 3$. Då gäller för $n = m+1$ att

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{m+1} \frac{1}{k^2-3k+2} &= \sum_{k=3}^{m} \frac{1}{k^2-3k+2} + \frac{1}{(m+1)^2-3(m+1)+2} = \\
&= 1 - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{(m+1)^2-3(m+1)+2} = \\
&= 1 - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m^2-m} = 1 - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m(m-1)} = \\
&= 1 + \frac{-m+1}{m(m-1)} = 1 - \frac{m-1}{m(m-1)} = 1 - \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ Utsagan är sann för $n = m+1$.

Induktionsprincipen ger därmed att utsagan är sann för alla heltal $n \geq 3$.

VSV.

4 Uppgift 4

Uppgift: Lös följande differentialekvationer:

(a) $y'(x) = \tan[y(x)]$

(b) $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2$

(c) $\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = 2x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Lösning: **Uppgift a)**:

$$y' = \tan(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(y)}{\sin(y)}y' = 1$$

är en separabel differentialekvation. Vi har

$$\frac{\cos(y)}{\sin(y)}\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = dx$$

Integration av båda led ger

$$\underbrace{\int 1\,dx}_{=x+D} = \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = [f(y) = \sin y] = \int \frac{f'(y)}{f(y)}dy = \ln|f(y)| + E = [f(y) = \sin y] = \ln|\sin(y)| + E$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \ln|\sin y| = x + F \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = Ce^x \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \arcsin(Ce^x)\ , \quad Ce^x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Uppgift b):

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2 \tag{4.1}$$

är en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Den karaktäristiska ekvationen till differentialekvationen ges av

$$P(r) = r^2 + 4r + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 4r = -3 \quad \Leftrightarrow \quad (r+2)^2 = -3 + 4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = -2 \pm 1$$

och har rötterna $r_1 = -3$ och $r_2 = -1$. Den allmänna lösningen till den homogena motsvarigheten till (4.1) ges därför av

$$y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x}$$

där A, B är godtyckliga konstanter.

Vi ansätter en partikulärlösning $y_p(x)$ till den inhomogena differentialekvationen (4.1) baserat på HL i (4.1). Eftersom sagda högerled består av $3x^2$ ansätter vi:

$$y_p(x) = Dx^2 + Ex + F$$

där D, E och F är konstanter. Vi har

$$y_p'(x) = 2Dx + E \qquad y_p''(x) = 2D$$

och insättning av y_p i ekvationen (4.1) ger

$$2D + 4(2Dx + E) + 3(Dx^2 + Ex + F) = 3x^2$$

Likhet för alla x kräver

$$\begin{aligned} x^2 &: \quad 3 = 3D \quad \Leftrightarrow \quad D = 1 \\ x^1 &: \quad 0 = 8D + 3E \quad \Leftrightarrow \quad 3E = -8D = -8 \quad \Leftrightarrow \quad D = -8/3 \\ x^0 &: \quad 0 = 2D + 4E + 3F \quad \Leftrightarrow \quad 3F = -2D - 4E = -2 + 32/3 = 26/3 \quad \Leftrightarrow \quad F = 26/9 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{26}{9}\ .$$

Den allmänna lösningen till (4.1) ges av följande (där A, B är godtyckliga konstanter)

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x} + x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{26}{9}$$

Uppgift c):

$$y'(x) + 2xy(x) = 2x^3$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplicera båda led med den integrerande faktorn e^{x^2}. Då gäller

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right) = y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = e^{x^2}\left(y' + 2xy\right) = 2x^3e^{x^2}$$

Integration av VL och HL m.a.p. x ger då

$$\int \frac{d}{dx}\left(ye^{x^2}\right)dx = \int 2x^3e^{x^2}dx = \begin{bmatrix} z = x^2 \\ dz = 2xdx \end{bmatrix} = \int ze^z dz \overset{PI}{=} ze^z - \int e^z = ze^z - e^z + C$$
$$= (z-1)e^z + C = [z = x^2] = (x^2-1)e^{x^2} + C$$

$$\Leftrightarrow \qquad ye^{x^2} = (x^2-1)e^{x^2} + D \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = (x^2-1) + De^{-x^2}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger därefter att

$$1 = y(0) = -1 + D \quad \Leftrightarrow \quad D = 2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x^2-1) + 2e^{-x^2}$$

Svar:
a) $y(x) = \arcsin(Ce^x)$. b) $y(x) = Ae^{-3x} + Be^{-x} + x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{26}{9}$
c) $y(x) = (x^2-1) + 2e^{-x^2}$

5 Uppgift 5

Uppgift: Låt D vara området i xy-planet som begränsas av graferna till $f(x) = -x^2 + 2$ och $g(x) = x^2$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring x-axeln.

Lösning: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. För att avgöra inom vilket intervall (i x) som graferna begränsar ett område i xy-planet söker vi skärningspunkterna mellan graferna,

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

Vi har två skärningspunkter, $x \in \{-1, 1\}$. Området D begränsas därför av graferna till $f(x), g(x)$ samt av linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Eftersom $f(x) > g(x)$ då $x \in (-1, 1)$ ges volymen av den kropp som fås då D roteras kring x-axeln via metoden med cirkelskivor av

$$V = V_f - V_g = \pi\int_{-1}^{1}(f(x))^2dx - \pi\int_{-1}^{1}(g(x))^2dx = \pi\int_{-1}^{1}(x^4 - 4x^2 + 4 - x^4)dx$$
$$= [\text{jämn integrand}] = 2\pi\int_0^1(-4x^2+4)dx = 2\pi\left[-\frac{4x^3}{3} + 4x\right]_0^1 = 2\pi\left(-\frac{4}{3} + 4\right) - 0 = \frac{16\pi}{3}.$$

Svar: $V = \frac{16\pi}{3}$.

6 Uppgift 6

En röd ballong har blivit punkterad, och mängden luft som pyser ut per sekund är proportionell mot skillnaden i lufttryck inne i och utanför ballongen. Under ett antagande om att trycket är proportionellt mot volymen luft i ballongen, och inte beror av någon annan variabel, samt att trycket i ballongen vid tiden noll var 106 kPa, bestäm en funktion som beskriver lufttrycket i ballongen genom att lösa en lämplig differentialekvation. Vad händer med lufttrycket i ballongen när tiden går mot oändligheten?

Lösning: Låt $y(t)$ beskriva lufttrycket i ballongen som en funktion av tiden (i sekunder). Om volymen luft i ballongen ges av $V(t)$ gäller

$$V'(t) = -k_1(y(t) - p_o)\,, \qquad y(t) = k_2V(t)\,, \qquad k_1\,,\, k_2\,,\, p_o \text{ positiva konstanter}$$

och den aktuella differentialekvationen ges av

$$y'(t) = -ky(t) + q\,,$$

där k och q är konstanter. Vi kan observera att $k = k_1k_2 > 0$ och $q = k_2p_o > 0$. Vi har att

$$y' + ky = q$$

är en linjär differentialekvation av första ordningen. Multiplikation av båda led med den integrerande faktorn e^{kt} ger

$$\frac{d}{dt}\left(ye^{kt}\right) = y'e^{kt} + kye^{kt} = qe^{kt}$$

Integration av båda led m.a.p. t ger

$$\int \frac{d}{dt}\left(ye^{kt}\right) dt = \int qe^{kt}dt$$

$$\Leftrightarrow \quad ye^{kt} = \frac{q}{k}e^{kt} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{q}{k} + Ce^{-kt}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 106$ ger

$$y(0) = \frac{q}{k} + Ce^0 = \frac{q}{k} + C = 106 \quad \Leftrightarrow \quad C = 106 - \frac{q}{k}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{q}{k} + \left(106 - \frac{q}{k}\right)e^{-kt}$$

Vi har även att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{q}{k}$$

dvs då $t \to \infty$ går lufftycket i ballongen mot ett konstant värde, som rimligtvis borde vara samma som lufttrycket utanför ballongen, dvs p_o i lösningen ovan.

$$\Rightarrow \quad y(t) = p_o + (106 - p_o)e^{-kt}$$

Svar: Lufttrycket i ballongen, i kPa och vid tiden t sekunder, ges av $y(t) = p_o + (106 - p_o)e^{-kt}$ där k, p_o är positiva konstanter, och p_o rimligtvis är lufttrycket utanför ballongen.