Omtentamen

MATEMATIK fredag 19 augusti 2022

Chalmers Tekniska Högskola 14:00 - 18:00

MVE426/MVE425/MVE640 Matematik, del D, våren 2022

Examinator: Thomas Wernstål, 031-772 3557
Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal och pennvässare

Tentan har åtta frågor.
Betygsgränser (inklusive bonus): 3:a: 20–27 poäng, 4:a: 28–34 poäng, 5:a: 35–40 poäng

Lösningar publiceras på kurshemsidan första vardagen efter tentamensdagen. Resultatet meddelas i Ladok.

OBS: Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra att ha på samma sida). Numrera de inlämnade bladen efter att du sorterat dem! Använd inte röd penna!

Fråga 1. Beräkna följande integraler:

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x^3)}{2x}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x(x+5)\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\mathrm{d}x$. (9p)

Fråga 2. Betrakta följande geometriska serie:

$$7+1+\frac{1}{7}+\dots$$

Skriv serien med summabeteckning och beräkna summan av serien. (3p)

Fråga 3. Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

för alla heltal $n \geq 1$. (5p)

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

(a) $y''(x)+y(x)=x^2-1$, (3p)

(b) $y(x)y'(x)=\dfrac{2}{x}$, för $x>0$, (3p)

(c) $\begin{cases} xy'(x)-y(x)=x, \text{ för } x>0, \\ y(1)=-1 \end{cases}$ (3p)

Fråga 5. Låt D vara området i xy-planet som begränsas av grafen till $1/x$ samt $x=1$, $x=2$ och $y=0$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y-axeln. (4p)

Fler uppgifter på nästa sida!

Lösningsförslag

Tentamen MVE426/MVE425/MVE640, del D, 19 aug 2022

Fråga 1 a) $\int \frac{\ln(x^3)}{2x}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix} =$

$$= \frac{3}{2}\int t\,dt = \frac{3}{4}t^2 + C = \underline{\underline{\frac{3}{4}(\ln x)^2 + C}}$$

b) $\int e^x(x+5)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partiell} \\ \text{integration}}}{=} e^x(x+5) - \int e^x\,dx = \underline{\underline{e^x(x+4) + C}}$

c) $\int \frac{x^2+1}{x^3-1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{\substack{\text{partialbråksuppd.} \\ \downarrow}}{=}$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| +$$

$$+ \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C}}$$

Fråga 2 $7 + 1 + \frac{1}{7} + \ldots = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{k-1}}} = \frac{7}{1-\frac{1}{7}} = \underline{\underline{\frac{49}{6}}}$

Fråga 3 Basfall: Då $n=1$ ges vänsterledet av
$VL = \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ och högerledet av $HL = \frac{1^2(1+1)^2}{4} =$
Alltså gäller likheten då $n=1$.

Induktionssteg: Antag att likheten gäller för något heltal $m \geq 1$ och visa att likheten gäller för $n=m+1$. Vi beräknar vänster-ledet för $n=m+1$;

$$VL = \sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 \overset{\text{enl. ind. ant.}}{=} \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^3 =$$

$$= \frac{(m+1)^2(m^2+4(m+1))}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

Detta är precis högerledet för $n=m+1$.
Vi har alltså visat likheten för $n=m+1$.

Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller likheten för alla heltal $n \geq 1$.

Fråga 4 a) $y'' + y = x^2 - 1$

kar. ekv.: $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i$
ger homogenlösningarna $y_h = A\cos x + B\sin x$
Vi ansätter partikulärlösning $y_p = Cx^2 + Dx + E$
vilket ger; $2C + Cx^2 + Dx + E = x^2 - 1$
så vi måste ha $C=1, D=0, E=-3$.
Samtliga lösningar har således formen;
$y = y_h + y_p = \underline{\underline{A\cos x + B\sin x + x^2 - 3}}$

b) $y'y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow y\,dy = \frac{2}{x}dx \underset{\substack{\uparrow \\ x>0}}{\Leftrightarrow} \underline{\underline{\frac{y^2}{2} = 2\ln x + C}}$

lösningen på implicit form.

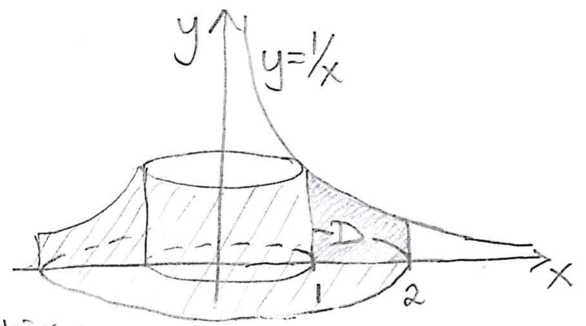
c) $xy' - y = x \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{1}{x} \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{1}{x}y = \ln x + C \Leftrightarrow y = x\ln x + Cx$

IF: $e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$y(1) = -1 \Rightarrow C = -1$ så $\underline{\underline{y = x\ln x - x}}$

Fråga 5



skiv-metoden

$$\text{Volymen} = \frac{3\pi}{2} + \pi\int_{1/2}^{1}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2 - 1\right)dy =$$

$$= \frac{3\pi}{2} + \pi\left[\frac{-1}{y} - y\right]_{1/2}^{1} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$

alt. $\text{Volymen} = \int_1^2 2\pi x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \underline{\underline{2\pi}}$

cylinder-metoden

Fråga 6 $\quad y'(t) = 10e^{-t/12} - ky(t) \quad (g/h) \quad , k>0$

$y' + ky = 10e^{-t/12} \Leftrightarrow (e^{kt}y)' = 10e^{(k-\frac{1}{12})t} \Leftrightarrow$

$e^{kt}y = \frac{10}{k-\frac{1}{12}}e^{(k-\frac{1}{12})t} + C \Leftrightarrow y = \frac{120}{12k-1}e^{-t/12} + Ce^{-kt}$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{-120}{12k-1} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{120}{12k-1}\left(e^{-t/12} - e^{-kt}\right)}}$