MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

Omtentamen
måndag 31 maj 2021
08:30 – 12:30

MVE426/MVE425 Matematik, del D, våren 2021
Lösningsförslag

Fråga 1. Beräkna följande integraler:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$, **(b)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$, **(c)** $\displaystyle\int_1^2 x\ln(8x)\mathrm{d}x$. (9p)

Lösning. (a) Vi har att $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$. Med ett variabelbyte får vi

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \Big[t = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x\Big]$$
$$= \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \arctan(t)+C = \arctan(x+1)+C.$$

(b) Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right).$$

Då kan vi beräkna integralen:

$$\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

Man kan även använda regeln $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+C$.

(c) Med hjälp av partiell integration får vi

$$\int_1^2 x\ln(8x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(8x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{8}{8x}\mathrm{d}x$$
$$= 2\ln(16) - \frac{1}{2}\ln(8) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$= 8\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(2) - \frac{3}{4}$$
$$= \frac{13}{2}\ln(2) - \frac{3}{4}.$$

Fråga 2. Visa med hjälp av induktion att

$$6^n+4$$

är delbart med 5 för alla heltal $n \geq 0$. (5p)

Lösning. *Basfallet* $n = 0$. Då $n = 0$ är $6^n + 4 = 6^0 + 4 = 1 + 4 = 5$ vilket är delbart med 5.

Induktionsantagande. Antag att påståendet gäller för $n = m$, dvs. att $6^m + 4 = 5k$ för något heltal k.

Induktionssteg. Vi visar att påståendet gäller för $n = m + 1$. Vi har att

$$6^{m+1} + 4 = 6 \cdot 6^m + 4 = 6(6^m + 4 - 4) + 4 = 6(6^m + 4) - 20 = 6 \cdot 5k - 20$$

vilket är delbart med 5.

Slutsats. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla heltal $n \geq 0$.

Fråga 3. För den geometriska talföljden $a_1, a_2, \ldots$ är $a_1 = 12$ och $a_2 = 10$. Avgör om serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

är konvergent och bestäm i så fall dess summa. (3p)

Lösning. Vi får i uppgiften att $a_1 = 12$. För geometriska serier gäller att

$$q = a_2/a_1 = 10/12 = 5/6.$$

Eftersom $|q| < 1$ så konvergerar serien enligt satsen om geometriska serier. Enligt denna sats ges dessutom summan av serien av

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-5/6} = \frac{12}{1/6} = 6 \cdot 12 = 72.$$

Fråga 4. Lös följande differentialekvationer:

(a) $\begin{cases} y'(x) = 2 + \mathrm{e}^{y(x)}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ (4p)

(b) $y'(x) + 2xy(x) = x,$ (3p)

(c) $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = \sin(2x).$ (3p)

Lösning. **(a)** Differentialekvationen är separabel och ekvivalent med

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2 + \mathrm{e}^{y(x)}} y'(x) &= 1 \\
\int \frac{1}{2 + \mathrm{e}^y} \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\
\int \frac{\mathrm{e}^y}{2\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{2y}} \mathrm{d}y &= x + C \qquad \left[\mathrm{e}^y = t, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^y \mathrm{d}y\right] \\
\int \frac{1}{2t + t^2} \mathrm{d}t &= x + C
\end{aligned}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{2t+t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}\right).$$

Vi noterar att $t > 0$ och får

$$\begin{aligned}
\ln(t) - \ln(t+2) &= 2x + 2C, \\
\frac{t}{t+2} &= \mathrm{e}^{2x+2C}, \\
1 - \frac{2}{t+2} &= \mathrm{e}^{2x+2C}, \\
t &= \frac{2}{1-\mathrm{e}^{2x+2C}} - 2, \\
\mathrm{e}^{y(x)} &= \frac{2}{1-\mathrm{e}^{2x+2C}} - 2, \\
y(x) &= \ln\left(\frac{2}{1-\mathrm{e}^{2x+2C}} - 2\right).
\end{aligned}$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger att

$$\frac{2}{1-\mathrm{e}^{2C}} - 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = 1 - \mathrm{e}^{2C}$$

och därför är $2C = \ln(1/3)$ vilket sedan ger att

$$y(x) = \ln\left(\frac{6}{3-\mathrm{e}^{2x}} - 2\right) = \ln\left(\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{3-\mathrm{e}^{2x}}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \ln\big(3\mathrm{e}^{-2x} - 1\big).$$

(b) Differentialekvationen är en linjär ekvation av första ordningen så vi kan använda metoden med integrerande faktor. Vi beräknar $\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$ och därför ges den integrerande faktorn av e^{x^2}. Vi multiplicerar differentialekvationen med den integrerande faktorn och får

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{x^2} y'(x) + 2x\mathrm{e}^{x^2} y(x) = x\mathrm{e}^{x^2}, \\
&\Leftrightarrow \quad \big(\mathrm{e}^{x^2} y(x)\big)' = x\mathrm{e}^{x^2}, \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x^2} y(x) = \int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C.
\end{aligned}$$

Därför är $y(x) = \frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-x^2}$.

Denna differentialekvation är separabel så man kan även lösa den med samma metod som (a).

(c) Det karakteristiska polynomet ges av $r^2 - r - 6$ och rötterna är $x = -2$ och $x = 3$. Därför ges den homogena lösningen av $y_h(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{3x}$.

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = C\sin(2x) + D\cos(2x)$. Då är $y_p'(x) = 2C\cos(2x) - 2D\sin(2x)$ och $y_p''(x) = -4C\sin(2x) - 4D\cos(2x)$. Med denna ansats är

$$y_p''(x) - y_p'(x) - 6y_p(x) = \Big(-10C + 2D\Big)\sin(2x) + \Big(-2C - 10D\Big)\cos(2x)$$

och vi vill att detta ska vara lika med $\sin(2x)$. Då är $C = -5/52$ och $D = 1/52$. Sammanfattningsvis får vi

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{x} - \frac{5}{52}\sin(2x) + \frac{1}{52}\cos(2x).$$

Fråga 5. Låt D vara området i xy-planet som begränsas av grafen till $f(x) = \cos(2x)$ samt $x = 0$, $x = \pi/4$ och $y = 0$. Beräkna volymen av den kropp som fås då D roteras kring y-axeln. (4p)

Lösning. Volymen ges av

$$\begin{aligned}
2\pi\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\mathrm{d}x &= 2\pi\left(\left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin(2x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \pi\frac{\pi}{4}\sin(\pi/2) + \pi\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}\Big(\cos(\pi/2) - \cos(0)\Big) \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Fråga 6. Vi studerar en population av insekter. Från början finns det 100 insekter. Om populationen inte påverkas av några yttre faktorer så kommer den att öka med en takt som är proportionerlig mot den nuvarande populationen och den kommer att dubblas på 20 dagar. Varje dag flyttar det in 3 insekter till populationen och 8 blir uppätna av fåglar.

Finn ett uttryck för populationens storlek $P(t)$ för samtliga tider $t \geq 0$. (4p)

Lösning. Om populationen inte påverkas av några yttre faktorer så gäller att

$$P'(t) = kP(t)$$

för någon konstant k. Detta ger att $P(t) = C\mathrm{e}^{kt}$ och eftersom $P(0) = 100$ så är $C = 100$. Vidare är $200 = P(20) = 100\mathrm{e}^{20k}$ vilket ger att $k = \ln(2)/20$.

Men populationen påverkas ju av yttre faktorer så differentialekvationen som P uppfyller ges i själva verket av

$$P'(t) = kP(t) - 5.$$

Men nu vet vi alltså vad k är. Om vi löser denna diff.ekvation får vi

$$\begin{aligned}
& P'(t) - kP(t) = -5, \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-kt}P'(t) - k\mathrm{e}^{-kt}P(t) = -5\mathrm{e}^{-kt}, \\
\Leftrightarrow \quad & \big(\mathrm{e}^{-kt}P(t)\big) = -5\mathrm{e}^{-kt}, \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-kt}P(t) = \frac{5}{k}\mathrm{e}^{-kt} + C, \\
\Leftrightarrow \quad & P(t) = \frac{5}{k} + C\mathrm{e}^{kt} = \frac{5\cdot 20}{\ln(2)} + C\mathrm{e}^{\ln(2)t/20}.
\end{aligned}$$

Fortfarande gäller att $P(0) = 100$ så därför är $C = 100 - (5\cdot 20)/\ln(2)$. Vi har alltså att

$$P(t) = \frac{5\cdot 20}{\ln(2)} + \Big(100 - \frac{5\cdot 20}{\ln(2)}\Big)\mathrm{e}^{\ln(2)t/20} = \frac{100}{\ln(2)} + \Big(100 - \frac{100}{\ln(2)}\Big)\mathrm{e}^{\ln(2)t/20}.$$