Lösningsförslag tenta 21/8-2020
MVE425, del D

① a) $\int_2^4 \sqrt{t}\cos t\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Partiell}\\ \text{integration}}}{=} \left[\sqrt{t}\sin t\right]_2^4 - \int_2^4 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt =$

$= 2\sin 4 - \sqrt{2}\sin 2 - \frac{1}{2}B$

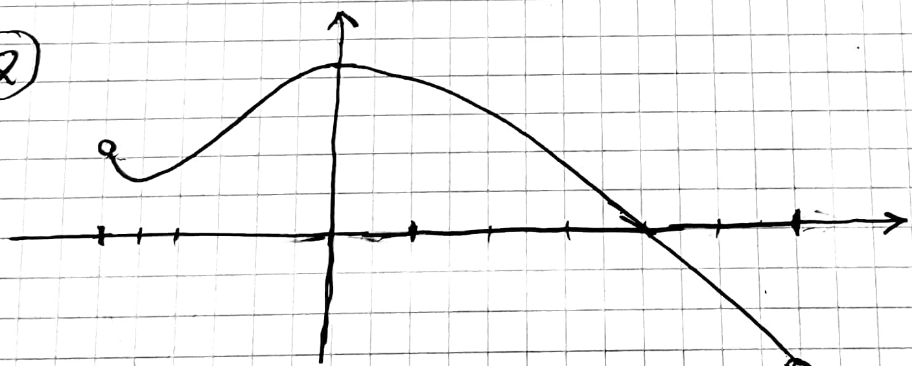
b) $\int_1^2 \sin(x^2)\,dx = \begin{bmatrix} x=\sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{bmatrix} = \int_1^4 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{A+B}{2}$

c) $\int_{-2}^{-1} \sin(t^2)\,dt = \begin{bmatrix} t=-\sqrt{x} \\ dt = \frac{-1}{2\sqrt{x}}dx \end{bmatrix} = \int_4^1 \frac{-\sin x}{2\sqrt{x}}\,dx =$

$= \int_1^4 \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{A+B}{2}$

---

②



---

③ Låt $VL(n) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ och $HL(n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Basfall: $VL(0) = \sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$, $HL(0) = \frac{1-x}{1-x} = 1$

så $VL(0) = HL(0)$.

Induktionssteget: Antag att $VL(p) = HL(p)$ för något visst $p \geq 0$. Då är:

$$VL(p+1) = \sum_{k=0}^{p+1} x^k = \sum_{k=0}^{p} x^k + x^{p+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enl. ind. ant.}}}{=}$$

$$= \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1} = \frac{1-x^{p+1}+x^{p+1}(1-x)}{1-x} =$$

$$= \frac{1-x^{p+2}}{1-x} = HL(p+1)$$

Så om $VL(p) = HL(p)$ så är också $VL(p+1) = HL(p+1)$.

$\therefore$ Av induktionsprincipen följer därför att $VL(n) = HL(n)$, för alla $n \geq 0$.

Scanned with Cam

④ a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\underline{\underline{1}}$

b) $x_n=a+bn$

$$\left.\begin{array}{l} x_2=a+2b=4 \\ x_5=a+5b=13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b=4 \\ 3b=9 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=3 \end{array}\right.$$

$x_7=-2+3\cdot 7=\underline{\underline{19}}$

c) $\sum_{n=1}^{100}x_n=100\cdot\frac{x_1+x_{100}}{2}=100\,\frac{1+298}{2}=\underline{\underline{14950}}$

---

⑤ $y'-\frac{1}{x}y=\frac{1}{x+1} \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{x}y\right)'=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

int. faktor

$e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}y=\ln|x|-\ln|x+1|+C$

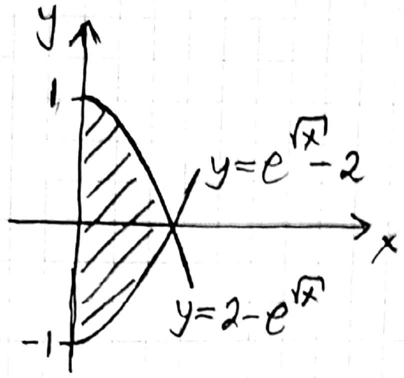
$\Leftrightarrow y=x(\ln|x|-\ln|x+1|+C)$

$y(1)=0 \Rightarrow 0=C-\ln 2 \Rightarrow C=\ln 2 \Rightarrow$

$\underline{\underline{y=x(\ln|x|-\ln|x+1|+\ln 2)=x\ln\left|\frac{2x}{x+1}\right|}}$

Scanned with Car

6 a)



b) $e^{\sqrt{x}}-2=2-e^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2e^{\sqrt{x}}=4 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\ln 2 \Leftrightarrow x=(\ln 2)^2$

$$\text{Arean} = \int_0^{(\ln 2)^2}\left(2-e^{\sqrt{x}}-(e^{\sqrt{x}}-2)\right)dx = \int_0^{(\ln 2)^2}(4-2e^{\sqrt{x}})dx$$

$$= 4(\ln 2)^2 - 2\int_0^{(\ln 2)^2} e^{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= 4(\ln 2)^2 - 2\int_0^{\ln 2} 2te^t\,dt =$$

$$= 4(\ln 2)^2 - 4\left(\left[te^t\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^t\,dt\right) =$$

$$= 4(\ln 2)^2 - 8\ln 2 + 4\left[e^t\right]_0^{\ln 2} =$$

$$= \underline{\underline{4(\ln 2)^2 - 8\ln 2 + 4}}$$

Scanned with Ca

⑦ $40y'' + gy = 0$

kar. ekv. $40r^2 + g = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{g}{40}}\, i$

$$\underline{\underline{y = A\cos\sqrt{\tfrac{g}{40}}\,t + B\sin\sqrt{\tfrac{g}{40}}\,t}}$$

⑧ Låt $x(t)$ vara längden (i meter) av den sträcka som kulan passerat t sekunder efter det att den träffade väggen. Enligt förutsättningarna påverkas kulan vid denna tidpunkt endast av en bromsande kraft, som är $k(x'(t))^2$ (N), för någon konstant k. Om kulans massa är m (kg), ger därför kraftekvationen att;

$$mx'' = -k(x')^2.$$

Om vi sätter $y = x'$ och $c = k/m$ så kan differentialekvationen skrivas;

$$y' = -cy^2$$

Denna diff.ekv. är separabel löses på följande sätt;

$$y' = -cy^2 \Leftrightarrow \frac{-dy}{y^2} = c\,dt \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{-dy}{y^2} = \int c\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{y} = ct + A \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{ct + A}, \text{ för någon konstant } A.$$

Scanned with Cam

Villkoret $y(0)=200$ medför att $A=\frac{1}{200}$ så

$$y=\frac{1}{ct+\frac{1}{200}} \quad \text{dvs.} \quad x'=\frac{1}{ct+\frac{1}{200}}$$

Integration ger att;

$$x(t)=\frac{1}{c}\ln\left(ct+\frac{1}{200}\right)+B$$

för någon konstant B.

Villkoret $x(0)=0$ medför nu att;

$$B=\frac{-1}{c}\ln\frac{1}{200} \quad \text{så}$$

$$x(t)=\frac{1}{c}\left(\ln\left(ct+\frac{1}{200}\right)-\ln\frac{1}{200}\right)=$$

$$=\frac{1}{c}\ln(200ct+1)$$

Antag nu att det tog T sekunder för kulan att passera väggen.

Villkoret $x'(T)=80$ medför då att;

$$x'(T)=\frac{200}{200cT+1}=80 \Leftrightarrow 200cT+1=\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T=\frac{3}{400c}$$

Slutligen medför villkoret $x(T)=0.1$ att

$$x(T)=\frac{1}{c}\ln(200cT+1)=\frac{1}{c}\ln\frac{5}{2}=0.1 \Leftrightarrow$$

$c=10\ln\frac{5}{2}$, och därmed att

$$T=\frac{3}{400c}=\frac{3}{4000\ln\frac{5}{2}}$$

Svar: Det tar kulan $3/(4000\ln\frac{5}{2})$ sekunder att passera väggen.

Scanned with Cam