1 Uppgift 1

Uppgift: Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x. Ange vilka deriveringsregler du använder och var i dina kalkyler de används. Svara på enklast möjliga form.

(a) $(1+x^2)\arctan x$ (b) $\sqrt{\cos(x/2)}$ (c) $\ln\left(\dfrac{3-x}{2x}\right)$

Lösning:

$$\text{a)}\quad D\left[(1+x^2)\arctan x\right] = [\text{produktregeln}] = 2x\arctan x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2x\arctan x + 1$$

$$\text{b)}\quad D\left[\sqrt{\cos(x/2)}\right] = [\text{kedjeregeln}] = \frac{1}{2\sqrt{\cos(x/2)}}(-\sin(x/2))\frac{1}{2} = -\frac{\sin(x/2)}{4\sqrt{\cos(x/2)}}$$

$$\text{c)}\quad D\left[\ln\left(\frac{3-x}{2x}\right)\right] = [\text{kedjeregeln}] = \frac{2x}{3-x}D\left[\frac{3-x}{2x}\right] = [\text{kvotregeln}] =$$

$$= \frac{2x}{3-x}\times\frac{-1(2x)-(3-x)2}{4x^2} = \frac{2x}{3-x}\times\frac{(-6)}{4x^2} = \frac{3}{x(x-3)}$$

Svar:

a) $D\left[(1+x^2)\arctan x\right] = 1 + 2x\arctan x$ *b)* $D\left[\sqrt{\cos(x/2)}\right] = -\dfrac{\sin(x/2)}{4\sqrt{\cos(x/2)}}$

c) $D\left[\ln\left(\dfrac{3-x}{2x}\right)\right] = \dfrac{3}{x(x-3)}$

2 Uppgift 2

Uppgift: Betrakta kurvan $y = \dfrac{1}{\ln(x)-\ln(x^2)}$. Bestäm ekvationerna för kurvans tangent och normal i punkten där $x = e^2$.

Lösning: För kurvan $y = f(x)$ gäller att tangenten i punkten där $x = a$ har ekvationen

$$y_T = f(a) + f'(a)(x-a)\,. \tag{2.1}$$

Vi har

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)-\ln(x^2)} = \frac{1}{\ln(x)-2\ln(x)} = -\frac{1}{\ln x} \tag{2.2}$$

$$f'(x) = (-1)^2\frac{1}{(\ln x)^2}\times\frac{1}{x} = \frac{1}{x(\ln x)^2} \tag{2.3}$$

så för $a = e^2$ gäller att

$$f(a) = f(e^2) \overset{(2.2)}{=} -\frac{1}{\ln(e^2)} = -\frac{1}{2\ln e} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(a) = f'(e^2) \overset{(2.3)}{=} \frac{1}{e^2[\ln(e^2)]^2} = \frac{1}{e^2[2\ln e]^2} = \frac{1}{4e^2}$$

och från (2.1) har vi därför att den efterfrågade tangentens ekvation ges av

$$y_T = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4e^2}(x-e^2)\,.$$

När $f'(a) \neq 0$ ges normalens ekvation (för kurvan $y = f(x)$ i punkten där $x = a$) av

$$y_N = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

så den efterfrågade normalens ekvation ges av

$$y_N = -\frac{1}{2} - 4e^2(x-e^2)\,.$$

Svar: Tangentens ekvation är $y_T = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4e^2}(x-e^2)$ och normalens ekvation är $y_N = -\dfrac{1}{2} - 4e^2(x-e^2)$.

3 Uppgift 3

Uppgift: Bestäm största och minsta värde för $f(x) = x(2x+3)e^{|x|}$ på intervallet $[-3/2, 1]$. (Tips: $e \approx 2.7$.)

Lösning: Funktionen

$$f(x) = x(2x+3)e^{|x|}\,, \quad D_f = [-3/2, 1]$$

är kontinuerlig på det slutna intervallet $[-3/2, 1]$. Satsen om största och minsta värde ger därför att $f(x)$ antar ett största och minsta värde på $[-3/2, 1]$.

Kandidater till största och minsta värde är randpunkter, singulära punkter och kritiska punkter. Randpunkterna är $x \in \{-3/2, 1\}$ med

$$f(-3/2) = 0\,, \quad f(1) = 5e\,.$$

Dessutom gäller att

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2+3x)e^x\,, & x \geq 0 \\ (2x^2+3x)e^{-x}\,, & x < 0 \end{cases}\,, \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = \begin{cases} (4x+3)e^x + (2x^2+3x)e^x = (2x^2+7x+3)e^x\,, & x > 0 \\ (4x+3)e^{-x} - (2x^2+3x)e^{-x} = (-2x^2+x+3)e^{-x}\,, & x < 0 \end{cases}$$

och eftersom

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3 = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \tag{3.2}$$

gäller att $f(x)$ är deriverbar i $x = 0$. Vi har $D_{f'} = (-3/2, 1)$. Därför saknas det singulära punkter.

De kritiska punkterna ges av $f'(x) = 0$. Eftersom $e^x > 0$ har söker vi lösningar till

$$\begin{aligned} (2x^2+7x+3) = 0\,, &\quad x > 0\,, \\ (-2x^2+x+3) = 0\,, &\quad x < 0\,. \end{aligned}$$

(vi vet redan att $f'(0) = 3 \neq 0$). För $x > 0$ har vi

$$\begin{aligned} &2x^2+7x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \frac{49}{16} = \frac{25}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2} < 0\,, \quad x_2 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \not> 0 \end{aligned}$$

så vi har ingen lösning till $f'(x) = 0$ i intervallet där $x > 0$. För $x < 0$ har vi

$$\begin{aligned} &-2x^2+x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{16} = \frac{25}{16} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2} > 0\,, \quad x_2 = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \not< 0\,, \quad x_2 < 0 \end{aligned}$$

så vi har en lösning, $x = -1$, till $f'(x) = 0$ i intervallet där $x < 0$. Vi har alltså att $x = -1$ är en kritisk punkt, med

$$f(-1) = -e\,.$$

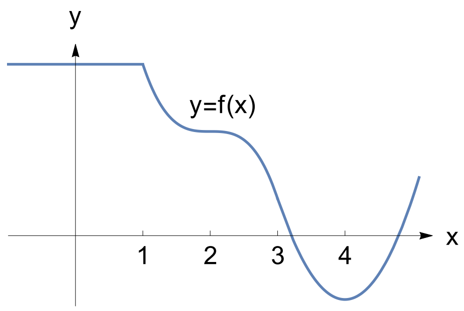
Eftersom $e > 0$ har vi att

$$f(-1) = -e < f(-3/2) = 0 < f(1) = 5e\,.$$

Svar: $\min_{x \in D_f} f(x) = -e$ och $\max_{x \in D_f} f(x) = 5e$.

4 Uppgift 4

Uppgift: Figuren till höger illustrerar grafen till en funktion $f(x)$. Gör ett teckenschema för funktionens derivata och andraderivata.



Svar:

x	$<$	1	$<$	2	$<$	3	$<$	4	$<$
$f''(x)$	0	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	0	$\nexists$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

5 Uppgift 5

Uppgift: Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{2-x^2}{3-x^2}$.

(a) Bestäm definitionsmängden och eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera väl!

(b) Bestäm eventuella vågräta och/eller sneda asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

(c) Bestäm eventuella kritiska punkter och gör ett teckenschema för derivatan.

(d) Avgör i vilka intervall som kurvan $y = f(x)$ är konvex respektive konkav.

(e) Skissa kurvan $y = f(x)$. All information från föregående deluppgifter ska tydligt framgå av grafen.

Lösning:
a)

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3-x^2} \qquad \Rightarrow \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} \tag{5.1}$$

Eftersom

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} (2-x^2) = -1$$

och

$$(3-x^2) \to 0^-, \quad \text{då} \quad x \to \sqrt{3}^+ \quad \text{och då} \quad x \to -\sqrt{3}^-$$
$$(3-x^2) \to 0^+, \quad \text{då} \quad x \to \sqrt{3}^- \quad \text{och då} \quad x \to -\sqrt{3}^+$$

gäller att

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3-x^2} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to \sqrt{3}^+ \quad \text{och då} \quad x \to -\sqrt{3}^-$$
$$f(x) = \frac{2-x^2}{3-x^2} \to -\infty \quad \text{då} \quad x \to \sqrt{3}^- \quad \text{och då} \quad x \to -\sqrt{3}^+$$

$\Rightarrow x = \sqrt{3}$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to \sqrt{3}$ och $x = -\sqrt{3}$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to -\sqrt{3}$.

b)

Då $f(x)$ är en rationell funktion med polynom av samma grad i både nämnare och täljare undersöker vi om det finns några vågräta asymptoter via

$$f(x) = \frac{2-x^2}{3-x^2} = \frac{2/x^2-1}{3/x^2-1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} \frac{0-1}{0-1} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ är vågrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to \pm\infty$. Vi noterar även att eftersom det finns en vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$, så saknas sneda asymptoter.

c)
$$f'(x) \overset{(5.1)}{=} \frac{-2x(3-x^2)-(2-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{-2x}{(x^2-3)^2} \tag{5.2}$$

D_f är ett öppet intervall, så randpunkter saknas. $D_{f'} = D_f$, så singulära punkter saknas. Kritiska punkter:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0\,,$$

så $x = 0$ är en kritisk punkt.

Tecknet på $f'(x)$ bestäms av polynomet i täljaren i (5.2), $-2x$, ty nämnaren $(x^2-3)^2 > 0$ för $x \in D_f$. Vi har $-2x > 0$ då $x < 0$ och $-2x < 0$ då $x > 0$. Alltså gäller att

$$f'(x) > 0\,,\ x \in (-\infty, 0) \setminus \{-\sqrt{3}\}$$
$$f'(x) < 0\,,\ x \in (0, \infty) \setminus \{\sqrt{3}\}$$

Teckenschema:

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	$2/3$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

med $f(0) = 2/3$.

d)

$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ är konvex, och $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ är konkav.

$$f''(x) \overset{(5.2)}{=} \frac{-2(x^2-3)^2-(-2x)2(x^2-3)2x}{(x^2-3)^4} = \frac{-2(x^2-3)+8x^2}{(x^2-3)^3} = \frac{6(x^2+1)}{(x^2-3)^3}$$

där täljaren karaktäriseras av $6(x^2+1) > 0$ för alla $x \in D_f$. Tecknet på $f''(x)$ sätts därför av nämnaren, $(x^2-3)^3$:

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-3)^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$

Pss erhålls

$$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})\,,$$

och de identifierade öppna intervallen täcker hela D_f, så inga ändpunkter är med i intervallen för var $f(x)$ är konvex respektive konkav.

e)

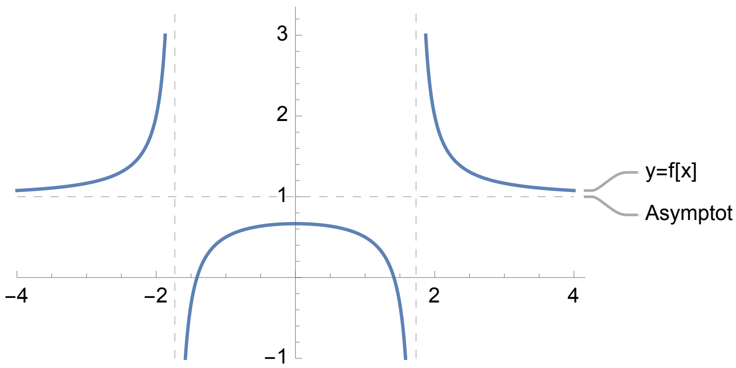


Figure 1: Kurvan $y = f(x)$. Asymptoterna ges av $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ och $y = 1$. Den lokala extrempunkten (ett maximum) ges av $(0, 3/2)$.

<u>Svar:</u>

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, $x = \sqrt{3}$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to \sqrt{3}$, och $x = -\sqrt{3}$ är lodrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to -\sqrt{3}$.

b) $y = 1$ är vågrät asymptot till $y = f(x)$ då $x \to \pm\infty$.

c) $x = 0$ är den enda kritiska punkten. För teckenschemat, se lösningen ovan.

d) $f(x)$ är konvex då $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, och konkav då $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

e) Se figur 1.

6 Uppgift 6

En myra som kryper uppför ett grässtrå betraktas uppifrån genom ett förstoringsglas. Om myran är på ett avstånd S_1 från förstoringsglaset kan förstoringen beskrivas genom att bilden av myran effektivt är på ett avstånd S_2 från förstoringsglaset, där $1/S_1 + 1/S_2 = 1/f$ och f är fokallängden på linsen i förstoringsglaset (en konstant). Säg att myran kryper rätt mot förstoringsglaset med en hastighet om 1 cm per sekund, och befinner sig på ett avstånd om 10 cm från förstoringsglaset. Med vilken hastighet ändras då bildens position S_2, om fokallängen på förstoringsglaset är 20 cm?

Lösning: Implicit derivering m.a.p. tiden av

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f} \tag{6.1}$$

ger

$$-\frac{S_1'}{S_1^2} - \frac{S_2'}{S_2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_2' = -\frac{S_2^2 S_1'}{S_1^2}$$

Vi har även att

$$(6.1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{S_1} \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{S_1}} \tag{6.2}$$

så det gäller att

$$S_2' = -\frac{S_2^2 S_1'}{S_1^2} \overset{(6.2)}{=} -\frac{S_1'}{S_1^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{S_1}\right)^2} = -\frac{S_1'}{\left(\frac{S_1}{f} - 1\right)^2}\,. \tag{6.3}$$

Myran kryper med en hastighet om 1 cm per sekund *mot* förstoringsglaset, så $S_1' = -1$ (avståndet S_1 minskar). Insättning av $S_1' = -1$, $f = 20$ och $S_1 = 10$ i (6.3) ger

$$S_2' = -\frac{(-1)}{\left(\frac{10}{20} - 1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = 4\,.$$

Svar: Bildens position S_2 ändras med en hastighet om 4 cm per sekund.