

Examinator: Märten Wadenbäck

Telefonvakt: Carl Lundholm, telefon: x6792

Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 32 poäng, och för betyget fem krävs minst 42 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2019-04-12. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

1. Derivera följande funktionsuttryck med avseende på x :

$$(a) \quad x^2 \ln x \quad (2p), \quad (b) \quad (1 + e^{2x})^2 \quad (2p), \quad (c) \quad \frac{\sin(3x)}{1 + x^3} \quad (3p)$$

2. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = x \cos x$ i den punkt där $x = \frac{\pi}{2}$. (7p)

3. Låt $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ vara definierad på det slutna intervallet $D_f = [1, e^2]$.

(a) Bestäm största respektive minsta värdet av f . (4p)

(b) Bestäm eventuella inflexionspunkter, och ange var f är konvex respektive konkav. (4p)

4. Bestäm asymptoter och lokala extrempunkter till $f(x) = \frac{x^3 - x}{4x^2 + 4x - 8}$, och skissera kurvan.

$$(Eventuell räknehjälp: $4x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 8 = 4(x^2 + 4x + 2)(x - 1)^2$.) (7p)$$

5. En skogsmus sitter på marken och betraktar oroligt en vråk som sitter på toppen av en 6 m hög telefonstolpe som står 6 m bort. Till skogsmusens stora lättnad börjar vråken plötsligt flyga långsamt i riktning bort från skogsmusen, på konstant höjd 6 m över marken och med farten 2 m/s. Hur snabbt växer avståndet mellan skogsmusen och vråken precis en sekund efter att vråken börjat flyga iväg?

(TIPS: Tänk på att en figur kan hjälpa dig att ställa upp problemet!) (7p)

6. Bestäm (till exempel genom att skissera en lämplig kurva), för varje värde på konstanten C , antalet lösningar till ekvationen

$$e^{-x^2} + C(x^2 - 5) = 0. \quad (6p)$$

7. Visa utifrån derivatans definition att $D[e^x] = e^x$.

$$(\text{Det är tillåtet att använda gränsvärdet } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ utan bevis.}) \quad (4p)$$

8. Formulera och bevisa satsen om sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet. (4p)

Lycka till!