Lösningar för tenta i MVE425 Matematik, del A 2019-01-08 kl. 08:30–12:30

1. (a) **Svar:** Fyra viktiga byggstenar för en matematisk teori är:

- Definitioner
- Axiom
- Satser
- Bevis

(b) Välj (minst) två av följande beskrivningar:

Definitioner används för att införa olika objekt och egenskaper (exempelvis ”cirkel” eller ”delbar med 3”).

Axiom är grundförutsättningar som talar om hur de definierade objekten fungerar och vilka egenskaper de har (till exempel ”genom två olika punkter går precis en linje”).

Satser är påståenden om de definierade objekten och egenskaperna, som är sanna under vissa angivna förutsättningar.

Bevis är argumentationskedjor som talar om att en viss sats gäller (och ofta också *varför* den gäller).

(c) *Likhetstecken* används mellan storheter (eller uttryck, eller värden) som *är lika*, till exempel

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

(Det är inte så vanligt att likhetstecken felanvänds på andra sätt än som beror på räknefel eller liknande.)

Implikationspilar används mellan två *utsagor* (påståenden), P och Q, om Q alltid är sann så fort P är sann. Detta skrivs då $P \Rightarrow Q$, och exempel på korrekt användning är

$$x = -1 \Rightarrow x^2 = 1.$$

Vanlig felanvändning är att använda implikationspilar som beteckning för ”nästa steg i min uträkning”, exempelvis

$$\frac{12}{9} \Rightarrow \frac{4}{3}.$$

Ekvivalenspilar innebär två implikationspilar (som fortfarande måste stå mellan två utsagor), så $P \Leftrightarrow Q$ betyder att både $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$ gäller. Exempel på korrekt användning är

$$y = 3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3}.$$

Typisk felanvändning av ekvivalenspil är att använda den istället för likhetstecken, som i

$$x^2 - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1).$$

2. (a) Vi förlänger bråken i täljaren till gemensam nämnare, skriver dem på gemensamt bråkstreck, och förenklar sedan dubbelbråket:

$$\frac{\frac{a}{a+2b} + \frac{2b}{a-2b}}{\frac{a+2b}{a^2-4b^2}} = \frac{\frac{a(a-2b)}{(a+2b)(a-2b)} + \frac{2b(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}}{\frac{a+2b}{a^2-4b^2}} = \frac{\frac{a^2-2ab}{a^2-4b^2} + \frac{2ab+4b^2}{a^2-4b^2}}{\frac{a+2b}{a^2-4b^2}}$$

$$= \frac{\frac{a^2-2ab+2ab+4b^2}{a^2-4b^2}}{\frac{a+2b}{a^2-4b^2}} = \frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2} \cdot \frac{a^2-4b^2}{a+2b} = \frac{a^2+4b^2}{a+2b}.$$

Svar: Uttrycket blir $\frac{a^2+4b^2}{a+2b}$.

(b) Vi utför polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & = -3x^2 + 2x + 2 \\
\hline
-2x^2+5 & 6x^4 - 4x^3 - 19x^2 \\
 & -(6x^4 - 15x^2) \\
\cline{2-2}
 & 0 - 4x^3 - 4x^2 \\
 & -(-4x^3 + 10x) \\
\cline{2-2}
 & - 4x^2 - 10x \\
 & -(-4x^2 + 10) \\
\cline{2-2}
 & - 10x - 10
\end{array}
$$

Svar: Kvoten är $-3x^2 + 2x + 2$ och resten är $-10x - 10$.

3. (a) Låt x vara antalet bilsläp av den mindre modellen och låt y vara antalet bilsläp av den större modellen som producerades under månaden. Totalt producerades $x+y = 260$ bilsläp, och de har sammanlagt $2x+4y = 740$ hjul. Tillsammans ger de två ekvationerna det lineära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 260 \\ 2x + 4y = 740. \end{cases}$$

Svar: Bilsläpsproduktionen beskrivs av ekvationssystemet $\begin{cases} x + y = 260 \\ 2x + 4y = 740 \end{cases}$, där x är antalet släp av den mindre modellen och y är antalet släp av den större modellen.

(b) *Systemet från* (a)*:* Eliminationsmetoden ger

$$\begin{cases} x + y = 260 \\ 2x + 4y = 740 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 260 \\ 2y = 220 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 110. \end{cases}$$

Icke-släp-systemet: Eliminationsmetoden ger

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \frac{1}{5}y = \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7. \end{cases}$$

Svar: Ekvationssystemet i (a) har lösningen $\begin{cases} x = 150 \\ y = 110 \end{cases}$. Det byggdes 110 fyrhjuliga släp. (Lösningen till det alternativa ekvationssystemet är $x = -4$ och $y = 7$.)

4. Vi börjar med att hitta brytpunkterna, $x = -\frac{1}{2}$ och $x = 1$, för absolutbeloppen. Vi får tre olika fall att betrakta.

Om $x < -\frac{1}{2}$: Här får vi

$$-(2x+1) - 4(x-1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -6x + 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{6},$$

som är en *falsk rot*, eftersom den inte uppfyller $x < -\frac{1}{2}$.

Om $-\frac{1}{2} \leq x < 1$*:* Här får vi

$$2x + 1 - 4(x-1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 5 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2},$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Slutligen, om $1 \leq x$*:* Här får vi

$$2x + 1 + 4(x-1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 3 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{6},$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $1 \leq x$.

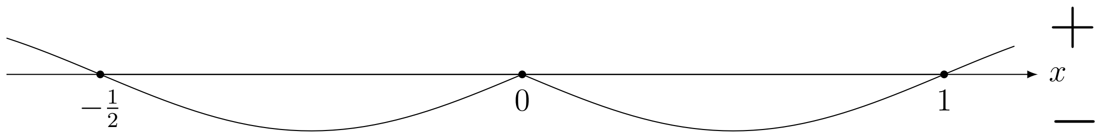
Svar: De enda lösningarna till ekvationen är $x = \frac{1}{2}$ och $x = \frac{7}{6}$.

5. Vi flyttar över allt till samma sida, sätter på gemensamt bråkstreck, och faktoriserar:

$$\begin{aligned}
\frac{2+x}{x^3+2x} > \frac{1}{x-x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2+x}{x^3+2x} - \frac{1}{x-x^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \\
\frac{2+x}{x(x^2+2)} - \frac{1}{x(1-x)} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(2+x)(1-x) - 1 \cdot (x^2+2)}{x(x^2+2)(1-x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \\
\frac{2 - 2x + x - x^2 - x^2 - 2}{x(x^2+2)(1-x)} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-x-2x^2}{x(x^2+2)(1-x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \\
-\frac{x(1+2x)}{x(x^2+2)(1-x)} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x(2x+1)}{x(x-1)} > 0.
\end{aligned}$$

Eftersom $x^2 + 2 > 0$ för alla x kunde vi multiplicera bort faktorn $x^2 + 2$ i sista steget utan att oroa oss för att behöva vända olikheten.

Möjliga punkter för uttrycket $\frac{x(2x+1)}{x(x-1)}$ att byta tecken i är $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$, och $x = 1$. Då $x = -\frac{1}{2}$ och då $x = 1$ sker verkligen teckenbyten eftersom det finns ett udda antal faktorer som motsvarar de nollställena, men vid $x = 0$ sker inget teckenbyte (faktorn x finns med två gånger). Eftersom vänsterledet är positivt ($= 5$) för $x = 2$ kan vi nu utan alltför stor möda rita upp följande förenklade teckentabell:



(OBS! Teckentabellen gör *inte* anspråk på att visa hur *grafen* ser ut!)

Svar: Olikheten gäller om $x < -\frac{1}{2}$ eller $1 < x$.

6. (a) Eftersom koefficienterna framför x^2 och y^2 har samma tecken kan vi misstänka att det är fråga om en ellips, men det skulle kunna vara så att ekvationen saknar lösningar (men då hade frågan varit felställd, eftersom det då inte hade varit något kägelsnitt). För säkerhets skull, och eftersom vi ändå har nytta av räkningarna senare, kvadratkompletterar vi:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + 9y^2 + 18y + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \\
\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + 9(\underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} - 1) + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1.$$

Detta är, precis som vi misstänkte, ekvationen för en ellips.

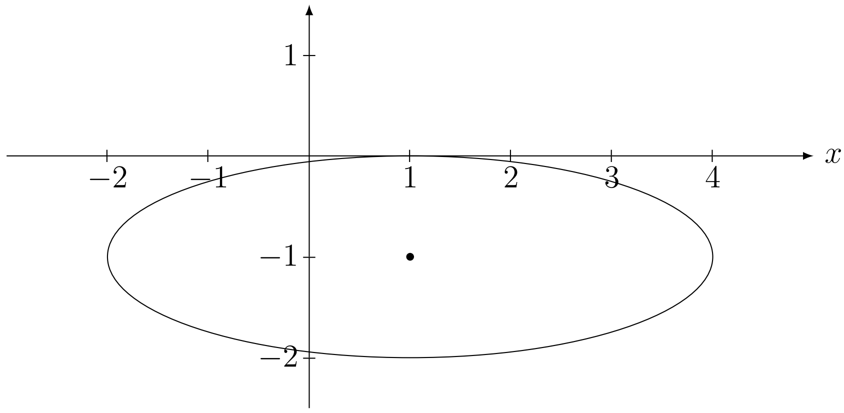
Svar: Ekvationen beskriver en ellips.

(b) Kvadratkompletteringen vi gjorde i (a) ledde till ekvationen

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1,$$

och ur denna kan vi läsa ut att ellipsen har medelpunkt i $(1, -1)$ och har halvaxlarna 3 (i x-led) och 1 (i y-led).

Svar: Ellipsens medelpunkt är $(1, -1)$, och ellipsens kurva ser ut så här:



(c) Ekvationen

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1$$

är en andragradsekvation i y. Vi får

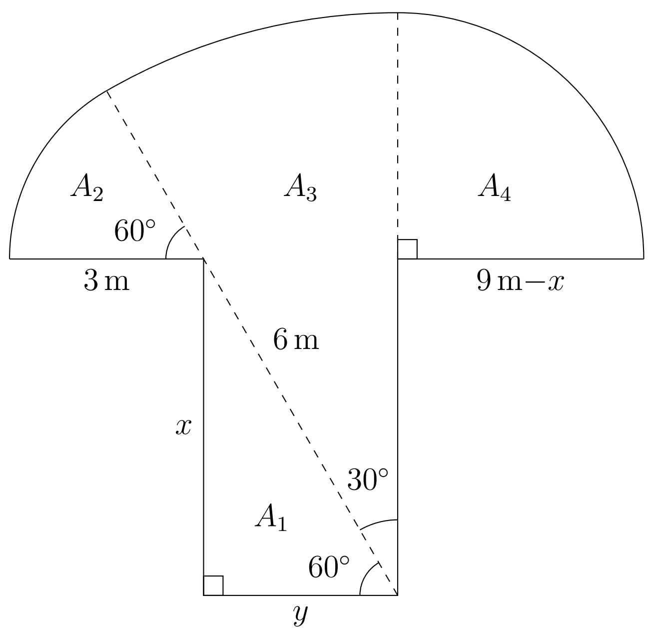
$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{1^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y+1)^2 = 1 - \frac{(x-1)^2}{3^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{3^2}}.$$

Eftersom $y \geq -1$ blir $y = -1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{3^2}}$. Uttrycket beskriver övre halvan av ellipsen, och är definierat för alla x som uppfyller $-2 \leq x \leq 4$.

Svar: Vi får $y = -1 + \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{3^2}}$, som är definierat då $-2 \leq x \leq 4$.

7. (a) Hundens område indelas naturligt i en rätvinklig triangel och tre cirkelsektorer enligt figuren nedan. Vi markerar ut ett par kända sträckor och vinklar, och inför beteckningar för några obekanta sträckor:



Vi börjar med att lösa ut sträckorna x och y:

$$\frac{x}{6\,\mathrm{m}} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\sqrt{3}\,\mathrm{m}$$

respektive

$$\frac{y}{6\,\mathrm{m}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = 3\,\mathrm{m}.$$

Triangelarean A_1 blir

$$A_1 = \frac{xy}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m}^2.$$

A_2 är arean av en cirkelsektor med vinkeln 60° och radien $3\,\mathrm{m}$, och alltså blir

$$A_2 = \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot (3\,\mathrm{m})^2 = \frac{9\pi}{6}\,\mathrm{m}^2 = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{m}^2.$$

På samma sätt är A_3 och A_4 areaor av cirkelsektorer (med olika radier och vinklar), och vi får

$$A_3 = \frac{30}{360} \cdot \pi \cdot (9\,\mathrm{m})^2 = \frac{81\pi}{12}\,\mathrm{m}^2 = \frac{27\pi}{4}\,\mathrm{m}^2$$

respektive

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot (9\,\mathrm{m} - 3\sqrt{3}\,\mathrm{m})^2 = \frac{3^2(3-\sqrt{3})^2\pi}{4}\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \frac{9(9-6\sqrt{3}+3)\pi}{4}\,\mathrm{m}^2 = \frac{9(12-6\sqrt{3})\pi}{4}\,\mathrm{m}^2 = \frac{54\pi - 27\pi\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Sammanlagt blir arean av hundens rörelseområde

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \\ &= \frac{18\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2 + \frac{6\pi}{4}\,\mathrm{m}^2 + \frac{27\pi}{4}\,\mathrm{m}^2 + \frac{108\pi - 54\pi\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \frac{18\sqrt{3} + 141\pi - 54\pi\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2 = \frac{3}{4}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Svar: Hundens rörelseområde har arean $\frac{3}{4}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2$. (Detta blir ca $45\,\mathrm{m}^2$).

(b) Skalan 1:100 innebär att alla längder avbildas som en hundradedel av sin egentliga längd (dvs en verklig meter blir en centimeter på skissen). Längdskalan ges av $S = \frac{1}{100}$, och areaskalan blir $S^2 = \frac{1}{100^2}$, så på skissen får hundens rörelseområde arean

$$\begin{aligned} A_{\text{skiss}} &= S^2 \cdot \frac{3}{4}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \frac{3}{400}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{m}^2 = \\ &= \frac{3}{4}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

Svar: På skissen blir arean $\frac{3}{4}(6\sqrt{3} + 47\pi - 18\pi\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 17.

9. Se boken eller bevisförslagen på kurshemsidan.